



Etats propres de systèmes classiquement chaotiques dans l'espace des phases

Stéphane Nonnenmacher

► To cite this version:

Stéphane Nonnenmacher. Etats propres de systèmes classiquement chaotiques dans l'espace des phases. Physique mathématique [math-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 1998. Français. <tel-00000855>

HAL Id: tel-00000855

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00000855>

Submitted on 8 Nov 2001

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Remerciements

Une thèse constituant avant tout un travail de recherche, je commencerai par faire l'éloge d'André Voros, qui a su avec patience, disponibilité et gentillesse (sup-)porter mes balbutiements d'apprenti-chercheur, en m'initiant aux subtilités jusqu'alors inconnues du semi-classique, en m'imposant sans relâche une rigueur et une remise en cause douloureuses mais néanmoins indispensables.

Passant d'un bureau à l'autre, j'ai eu la chance de bénéficier de voisins (par ordre chronologique, Didina Serban, Georg Schreiber, Marc Bocquet et Gabrielle Bonnet) exemplaires pour leur discrétion et leur indulgence à mon égard. Je suis aussi reconnaissant à D. Bessis et A. Mezincescu pour avoir su recréer une atmosphère 'méditerranéenne' au milieu du froid plateau de Saclay et de ses équations.

Le Service de Physique Théorique, bien que légèrement isolé du monde, constitue à mon avis un lieu idéal de réflexion et d'émulsion intellectuelle. Mes tribulations scientifiques ont souvent retrouvé le droit chemin lors de discussions avec (parmi d'autres) M. Bauer, J.-M. Luck, V. Pasquier, S. Creagh. D'autres types de déboires (de nature plus informatique ou administrative) ont eu un dénouement heureux grâce à l'intervention de C. Verneyre, C. Bourgois, L. De Sèze, F. Marabelle, M. Gingold, J. Delouvrier, B. Savelli, F. Lefèvre, A.-M. Arnold, S. Zaffanella. Je tiens à remercier globalement toutes les personnes et instances ayant permis mon séjour heureux en ces murs saclaysiens.

Ayant bénéficié d'une charge de moniteur à l'université d'Orsay, j'ai eu la chance de m'initier aux joies et aux pleurs de l'enseignement supérieur, guidé par l'expérience et la gentillesse de J. Lory, J.-P. Maillet, A.-L. Roche, C. Poutret, et du groupe pédagogique de M3 en général. J'ai aussi apprécié le dévouement des membres du CIES de l'académie de Versailles (en particulier S. Don et J.-M. Quénardel) dans l'assistance qu'ils portent aux enseignants en herbe que sont les moniteurs.

Revenant à des préoccupations plus scientifiques, je remercie les multiples personnes ayant consacré une partie de leur temps précieux à m'écouter et m'instruire de leurs lumières. Je pense bien entendu aux différents membres du jury : M.-J. Giannoni, D. Delande et J. Hannay m'ont fait l'honneur d'accepter d'en faire partie avant même de connaître la nature de mes travaux. Thierry Paul, qui me connaissait un peu mieux, a eu la gentillesse d'assister à ma soutenance, entre deux avions. Je remercie doublement P. Lebœuf et S. De Bièvre pour l'intérêt soutenu qu'ils m'ont manifesté depuis le début de la thèse, et également pour avoir supporté la tâche ingrate de rapporteurs (plutôt deux fois qu'une). Je remercie aussi O. Bohigas pour ses encouragements constants et son aide précieuse, M. Saraceno pour ses conseils et ses éclaircissements multiples. Il me faudrait en fait citer une bonne partie des participants au Semestre É. Borel consacré au chaos quantique, qui m'ont permis de m'orienter un peu dans la jungle du sujet.

Une thèse ne se nourrit pas que d'équations, mais également de périodes

de repos et de détente (n'en déplaie à certains stakhanovistes). Je réalise à quel point mes petites 'échappées musicales' ont pu contribuer à un équilibre mental précaire : loués soient donc les membres d'Ut 5e, le conservatoire du 9e, Marc Patard et ses acolytes, Philippe et Bérengère, et les fameux Thés à la poire. Comme il me reste un peu de place en bas de page, je me permets d'égrener quelques noms de personnes ayant rendu cette période plus agréable qu'elle n'aurait été en leur absence (les oublié(e)s peuvent se signaler, il me reste 3 mois pour corriger) : Catherine(s), Dietrich & Co., Marion, Joan, Alia, Mathis, Laurence, Cédric, Élisabeth, Hélène, Anne(s), Isabelle, Liz, Gilles, Sélim, Monika, David(s), Jintai, Julie, la tribu Nonnen, Cécile, Tarek, Katia, Arun, etc etc..

Résumé

Ce travail a pour objet l'étude des systèmes dynamiques quantiques dont la limite classique est chaotique, et en particulier de leurs états liés. Nous nous restreignons à des systèmes unidimensionnels. Les états quantiques sont représentés par des densités de probabilité dans l'espace des phases (densités de Husimi), afin de les comparer, dans la limite semi-classique, aux mesures invariantes classiques. De façon duale, tout état quantique peut être reconstruit à partir de la *constellation* formée par les zéros de sa densité de Husimi.

Nous amorçons l'étude par un système hamiltonien intégrable présentant un point fixe instable. Une approximation WKB uniforme près de l'énergie critique fournit une description semi-classique précise des états propres : tandis que leurs densités de Husimi se concentrent sur la séparatrice, les constellations de zéros s'alignent le long de lignes d'anti-Stokes, également de nature classique.

Nous considérons ensuite des transformations canoniques hyperboliques sur un espace des phases compact (le tore), qui sont très chaotiques, et qu'on sait quantifier : ce sont les applications du chat d'Arnold et du boulanger. Le caractère arithmétique des premières permet de construire des familles d'états très particuliers, appelés *états cristallins* en raison de la forme de leurs constellations.

Plus généralement, nous montrons que les états propres de ces systèmes sont bien modélisés, *en moyenne*, par des états aléatoires gaussiens : leurs densités de Husimi, ainsi que leurs constellations, sont semi-classiquement équidistribuées sur le tore, mais présentent néanmoins des fluctuations quantiques universelles. À l'opposé, il semble que les caractéristiques spécifiques à un état propre *individuel* (par exemple une *cicatrice* sur un point périodique classique) soient codées de façon robuste par les premiers coefficients de Fourier de sa constellation.

Abstract

The aim of this work is to study classically chaotic quantum systems. We restrict ourselves to one-dimensional dynamics, and pay a particular attention to eigenstates, using both analytical and numerical methods. Quantum states are represented using phase space probability densities (Husimi densities), so that they can be easily compared to classically invariant measures, in the semiclassical limit. On the other hand, a quantum state can be built directly from the knowledge of its *constellation*, i.e. the set of zeros of its Husimi density.

We first study an integrable Hamiltonian system with a fixed unstable point. A precise description of Husimi densities of eigenstates near the critical energy is provided by uniform WKB approximations. While densities concentrate exponentially around the separatrix, zeros are distributed along classically defined (anti-Stokes) lines.

We then study area-preserving maps on the torus, in particular Arnold's 'cat' maps and the baker's map, which are both proven to be fully chaotic and for which we know a consistent quantization procedure. Due to arithmetical properties of cat maps, we can build families of very ergodic eigenstates, for which the constellations form *crystals* on the torus.

More generally, we show that eigenstates of these quantum maps have, *on average*, similar properties to Gaussian random states : their Husimi densities and constellations are grossly equidistributed over the whole torus in the semiclassical limit, and their fluctuations around the ergodic measure are universal. On the other hand, we argue that the specific features of an *individual* eigenstate (e.g. a *scar* above a periodic point) can be robustly extracted from the first few Fourier coefficients of its constellation.

Table des matières

Introduction générale	9
1 Chaos classique et quantique	15
1.1 Rappels de mécanique classique	15
1.1.1 Dynamique réduite	17
1.1.2 Analyse locale de stabilité	20
1.1.3 Classification des applications chaotiques	20
1.1.4 Quantification de transformations à temps discret	22
1.2 Chaos quantique	24
1.2.1 Quelques systèmes physiques?	24
1.2.2 Problématiques du chaos quantique	26
1.2.3 Quantités invariantes	27
2 Un système intégrable sur le plan	33
2.1 Fonctions de Bargmann–Husimi dans le plan	33
2.1.1 Fonctions de Wigner et de Husimi	35
2.1.2 Autres géométries	37
2.1.3 Propriétés semi-classiques des fonctions de Wigner et Husimi	40
2.2 Point fixe hyperbolique	40
2.2.1 \hat{H}_{hyperb} en représentation de Bargmann	41
2.2.2 Développements asymptotiques	43
2.2.3 Comportement semi-classique des fonctions de Husimi	46
2.2.4 Représentation stellaire des fonctions propres	47
2.2.5 Confirmation numérique	50
3 Chaos quantique sur le tore	53
3.1 Mécanique quantique sur le 2-tore	53
3.2 Représentation de Bargmann sur le tore	56
3.2.1 Analogie avec les fonctions d’onde de Landau	57
3.2.2 Densité de Husimi. Représentation stellaire sur \mathbb{T}^2	59
3.2.3 États cohérents sur le tore	61
3.3 Deux transformations chaotiques du tore	63
3.3.1 Transformation du boulanger	63

3.3.2	Transformations du ‘chat’ d’Arnold	65
3.4	États propres cristallins des chats quantifiés	68
3.4.1	Construction des états propres	69
3.4.2	Réseaux invariants	71
3.4.3	Propriétés ergodiques des réseaux invariants	74
3.4.4	États cristallins	75
4	Fluctuations des états propres chaotiques	77
4.1	Objectifs	77
4.2	États de référence	77
4.2.1	États ergodiques	78
4.2.2	États localisés	81
4.3	Propriété de Schnirelman	84
4.3.1	Historique	84
4.3.2	Preuve schématique du théorème de Schnirelman	85
4.4	Quelques outils d’analyse des fonctions de Husimi	86
4.4.1	‘Normes’ des fluctuations	87
4.4.2	Représentation stellaire	92
4.5	Résultats sur les ‘normes’	96
4.5.1	‘Normes’ des états de référence	96
4.5.2	‘Normes’ des états propres chaotiques	101
4.6	Équidistribution des constellations de zéros	103
4.6.1	Conséquences de l’équidistribution des zéros	106
4.6.2	Phase de $\psi(z)$	107
4.7	Corrélations entre zéros. Facteurs de forme	110
4.7.1	Méthodes et résultats statistiques	110
4.7.2	Résultats sur les coefficients de Fourier	119
4.7.3	Cicatrices	123
4.7.4	Comparaison aux estimations semi-classiques	126
	Conclusion générale	131
	Annexes	134
A	Calcul des ‘normes’ pour les états sur réseau	135
B	Bornes L^∞ pour les états propres du chat	139
	Bibliographie	143
	Articles	151

Introduction générale

L'objet principal de cette thèse est l'étude de transformations quantiques classiquement chaotiques sur le tore bidimensionnel. Avant de rentrer dans les détails, tâchons tout d'abord d'éclairer le lecteur sur la pertinence (relative) de ce genre de modèle en physique (afin de justifier en partie la mention 'physique théorique' sur la page de garde).

Les transformations canoniques à temps discret interviennent dans l'étude des systèmes dynamiques classiques, c'est-à-dire l'évolution dans le temps d'un point sur un *espace des phases*, régie par des équations de mouvement ; pour un système réaliste, l'espace des phases est généralement à $6n$ dimensions, où n est le nombre de particules physiques qui se déplacent, et les équations de mouvement sont des équations différentielles par rapport au temps (par exemple, des équations de Hamilton). Cependant, un tel système est généralement trop complexe pour être analysé aisément. On est juste capable d'en décrire certaines caractéristiques plus ou moins génériques, selon la nature des équations de mouvement. Il est alors commode de modéliser certaines de ces caractéristiques en utilisant des systèmes dynamiques 'jouets', généralement de plus basse dimensionnalité, et qui peuvent être à temps discret : ces systèmes dynamiques 'jouets', qui sont censés *isoler* une caractéristique précise du 'gros' système de départ, ne sont plus donnés par des équations différentielles, mais par des applications canoniques de l'espace des phases sur lui-même. Par exemple, les deux applications sur le tore que nous nous proposons d'étudier (dites respectivement 'du chat' et 'du boulanger') ont été introduites par les mathématiciens comme des archétypes possédant deux propriétés caractéristiques du chaos classique : la propriété d'Anosov, et la dynamique symbolique [8]. Les raisons principales d'utiliser un espace des phases torique sont d'une part son caractère bidimensionnel (donc de dimension minimale), d'autre part sa compacité, qui force les points à revenir au voisinage de leur position initiale.

Le concept de chaos dynamique est apparu en étudiant des systèmes de planètes (en nombre $n \geq 3$) en interaction gravitationnelle, pour lesquels la mécanique classique s'applique à merveille. Si on remplace celles-ci par des électrons et des noyaux atomiques en interaction coulombienne (également en $1/r^2$), la taille du système impose d'utiliser le formalisme quantique. On se retrouve donc face au problème de quantification (c'est-à-dire , déterminer le spectre et les

états propres) d'un système classiquement non intégrable, défini dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^{3n})$. Pour analyser ce système quantique, on va court-circuiter le processus de quantification, c'est-à-dire qu'on va quantifier directement les transformations à temps discret, étudier leurs propriétés, et croiser les doigts pour que ces propriétés soient aussi génériques qu'au niveau classique. Pour les applications sur le tore que nous considérons, on sait définir de façon assez naturelle les espaces de Hilbert (section 3.1), ainsi que les propagateurs quantiques correspondant à ces applications (section 3.3.2). De plus, ces propagateurs sont assez simples pour qu'on puisse les étudier (analytiquement et numériquement) beaucoup plus en détail que les dynamiques quantiques réalistes. Enfin, on espère qu'ils ne capturent, comme au niveau classique, que la substantifique moëlle du chaos quantique (si tant est qu'elle existe), qui est dissimulée sous des couches de détails non pertinents –impertinents– dans le système réaliste.

Incidentement, outre le caractère 'archétypique' de ces transformations quantiques sur le tore, la réalité rejoint presque la fiction, puisqu'on dispose depuis peu de temps de systèmes expérimentaux dont la description revient à une dynamique quantique bidimensionnelle de contrepartie classique chaotique. Je pense à certains systèmes de physique du solide, communément regroupés sous le terme de 'systèmes mésoscopiques' : il s'agit généralement de composés électroniques de faible taille (\lesssim au micron) fabriqués par épitaxie, dans lesquels les électrons sont piégés dans des plans, voire sur une droite ou près d'un point. On peut alors étudier les propriétés de transport électronique à travers des cavités dont on fixe la forme, la taille, etc.. En particulier, on obtient une réalisation expérimentale (parmi d'autres) de billards quantiques bidimensionnels, qui sont eux aussi des archétypes de systèmes classiquement chaotiques. Si on impose un champ magnétique intense perpendiculairement au plan des électrons, qu'on suppose également soumis à un potentiel bipériodique, on retrouve en fait une mécanique quantique sur le 2-tore, similaire à celle que nous nous proposons d'étudier (cf. section 3.2.1). Des applications quantiques similaires ont en fait été utilisées pour tenter de comprendre les transitions entre plateaux de conductivité dans les systèmes présentant un effet Hall quantifié [65, 9, 58].

Après ces quelques tentatives de justifications physiques, nous décrivons plus en détail le contenu de ce travail. Outre les applications quantiques sur le tore, nous nous sommes également intéressés à une dynamique hamiltonienne dans le plan \mathbb{R}^2 : plus précisément, nous avons étudié les états propres (de diffusion) de l'hamiltonien purement hyperbolique $H_{\text{hyperb}} = qp$. Par moments, nous évoquerons aussi certaines applications classiquement chaotiques définies sur la sphère \mathbb{S}^2 , mais nous n'avons pas approfondi leur étude ici. Tous ces systèmes dynamiques seront tout d'abord définis classiquement, puis quantifiés sur les espaces de Hilbert adéquats (pour le tore et la sphère, ces espaces sont de dimension finie inversement proportionnelle à la constante de Planck). Nous nous sommes attachés particulièrement à l'étude des *états propres* des différents systèmes, plutôt

qu'à leurs spectres. D'autre part, nous avons choisi de représenter ces états par des fonctions définies dans *l'espace des phases*, en utilisant un formalisme d'états cohérents indexés par une variable de position complexe $z = \frac{q-ip}{\sqrt{2}}$: la fonction représentant l'état quantique (dite fonction de Bargmann) sera ainsi une fonction analytique en la variable z , à partir de laquelle on peut définir une *densité* positive ou nulle sur l'espace des phases (densité de Husimi). C'est par le biais de cette densité (d'origine quantique) qu'on voudrait faire le lien avec la dynamique classique. Généralement on cherche à identifier les caractéristiques *macroscopiques* de ces densités, pour les comparer aux mesures classiquement invariantes sur l'espace des phases, dans la limite où la constante de Planck tend vers zéro : les densités de Husimi se concentrent effectivement de façon uniforme sur les régions classiquement autorisées, c'est-à-dire, dans le cas hamiltonien, les surfaces d'énergie ; dans le cas des applications chaotiques sur \mathbb{T}^2 , le tore tout entier. Nous avons cherché à préciser cette correspondance entre grandes structures quantiques et classiques, mais surtout à étudier les caractéristiques 'microscopiques' des densités de Husimi, plus exactement les points de l'espace des phases où ces densités s'annulent ; il se trouve en effet que les propriétés analytiques de ces densités permettent de les reconstruire sans ambiguïté à partir de l'ensemble de leurs *zéros* (et de deux coefficients supplémentaires, dans le cas du plan) : on obtient ainsi la *représentation stellaire* des états purs quantiques. Un de nos objectifs a été de mieux caractériser semi-classiquement ces *constellations* de zéros, dans les cas où ils représentent des états propres. On a utilisé à cet effet des outils habituels de mécanique statistique décrivant un ensemble de particules à l'équilibre, comme la densité moyenne de particules, la fonction de corrélation à deux particules, etc..

L'étude de l'hamiltonien hyperbolique permet de mettre en évidence ces aspects complémentaires des densités de Husimi dans le cas d'une dynamique intégrable : pour les énergies régulières, on peut appliquer le formalisme WKB directement en représentation de Bargmann. Grâce à la simplicité de l'hamiltonien, ce formalisme a pu être étendu à l'énergie critique d'un point fixe hyperbolique : on obtient ainsi une approximation uniforme des fonctions de Bargmann et de Husimi autour de cette énergie. L'intérêt pour la dynamique de \hat{H}_{hyperb} vient aussi du fait que l'hyperbolicité est un ingrédient indispensable au chaos : les points fixes des applications du chat et du boulanger sont tous instables, à l'instar de l'origine pour H_{hyperb} . Il est donc possible que certaines caractéristiques des états propres de cet hamiltonien soient aussi présentes dans ceux des applications quantiques chaotiques, au moins localement dans l'espace des phases.

Pour tenter de répondre à cette question, nous avons donc entrepris une étude à la fois dynamique, statistique et numérique des états propres de ces applications quantiques, dans la limite semi-classique. Les résultats dynamiques sont assez fragmentaires, comparés à la précision apportée par les approximations WKB dans le cas intégrable. Ils consistent en une propriété d'équidistribution semi-classique des densités de Husimi sur le tore (propriété de Schnirelman) ; nous

avons pu en déduire rigoureusement une propriété analogue pour les constellations des états propres, qui a également débouché sur des propriétés universelles de la *phase* des fonctions de Bargmann (leur module étant donné par la densité de Husimi) ; cette équidistribution des constellations n'est pas spécifique au tore, mais est également montrée pour d'autres géométries bidimensionnelles. Une caractérisation plus précise des constellations (ou d'autres aspects des fonctions de Husimi) n'est actuellement possible que par une approche *statistique* des états propres, c'est-à-dire en les identifiant à des états aléatoires dans l'espace de Hilbert. On peut en effet cerner plus précisément les corrélations entre les zéros, ainsi que les facteurs de forme des constellations, pour ces ensembles d'états aléatoires sur le tore. Ces prédictions ont ensuite été comparées aux états propres chaotiques obtenus numériquement : en règle générale, l'accord est très bon lorsqu'on prend la moyenne sur tous les états propres. En ce qui concerne les états individuels, les résultats statistiques constituent un 'bruit de fond', à partir duquel il semble possible (sans qu'on sache encore le faire explicitement) d'extraire les caractéristiques spécifiques au système et à l'état propre considérés, comme par exemple les *cicatrices* de points périodiques sur certaines densités de Husimi. Nous n'avons pas cherché à *expliquer* semi-classiquement les raisons de cette correspondance entre états propres et états aléatoires, ni l'apparition des cicatrices (on dispose de résultats partiels à ce propos). On s'est plutôt attaché à tenter de décrire quantitativement cette correspondance, en utilisant ces applications quantiques du tore. Enfin, la question posée plus haut, sur la pertinence des fonctions propres de \hat{H}_{hyperb} pour décrire un état propre chaotique au voisinage d'un point fixe instable n'a pas trouvé, à l'heure actuelle, de réponse définitive.

Plan de la thèse

La majeure partie des résultats présentés dans cette thèse ont été (ou au moins ont l'ambition d'être) publiés dans trois articles, présentés en appendice [1, 2, 3]. Nous avons tenté un compromis entre le simple agrafage de ces articles (rédigés en anglais), et une traduction complète et exhaustive. Nous avons choisi de reproduire ici les résultats les plus caractéristiques, en omettant souvent le détail des calculs ou des preuves. Inversement, nous avons parfois rajouté une section décrivant un procédé de calcul que l'article correspondant tenait pour acquis (c'est le cas par exemple des fonctions de corrélations entre zéros dans les modèles statistiques : nous présentons ici la méthode due à Hannay [66]). Nous espérons que le lecteur n'aura pas trop à pâtir de ce compromis.

Nous nous sommes tout d'abord efforcé de présenter le contexte dans lequel apparaissent les problématiques étudiées dans la thèse, pour qu'elles ne semblent pas brutalement parachutées.

Dans le premier chapitre, nous rappelons les bases de la théorie des systèmes dynamiques classiques : celle-ci relie les propriétés de stabilité locale des trajectoires aux propriétés plus globales des mesures invariantes, en particulier l'ergodicité. Nous y exposons également la réduction d'une dynamique continue en une

dynamique à temps discret, définie sur un espace de dimension plus basse : ce procédé nous encourage donc à étudier les applications chaotiques, plutôt que des flots hamiltoniens de dimension supérieure. Nous nous penchons rapidement sur les problèmes posés par l'obtention du propagateur quantique à partir d'une transformation canonique à temps discret.

La suite du chapitre est consacrée à la définition de l'expression 'chaos quantique' : en gros, il s'agit d'identifier sur les données quantiques (spectre, états propres), la nature chaotique de la dynamique classique. Nous établissons également un court inventaire des systèmes physiques dans lesquels le caractère chaotique de la dynamique classique a des effets importants sur les quantités mesurées expérimentalement. On voit s'y profiler déjà un 'pont' entre système chaotique et système désordonné, ou aléatoire.

Le second chapitre présente le formalisme des représentations de Bargmann–Husimi ainsi que la représentation stellaire pour des fonctions d'onde sur la droite réelle. Ces représentations sont ensuite utilisées pour analyser les fonctions propres de diffusion de l'hamiltonien \hat{H}_{hyperb} , qui sert à modéliser localement un point fixe instable. Nous résumons ici les résultats de [1], mais décrivons en détail les méthodes asymptotiques utilisées pour obtenir de bonnes approximations des états propres de cet hamiltonien, dans ces diverses représentations : on aura donc un aperçu de la différence profonde entre ces méthodes et celles que nous développerons pour décrire les états chaotiques. Outre son intérêt propre sur le plan des approximations uniformes dans la méthode WKB, ce chapitre sert en quelque sorte de 'butoir' contre lequel va s'appuyer l'étude de ces états chaotiques.

Le troisième chapitre contient une large fraction cinématique, dont on va se servir dans la suite. Nous y définissons la mécanique quantique sur un espace des phases compact, le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, ainsi que les représentations de Bargmann–Husimi–stellaire sur cet espace. Nous y avons inclus quelques résultats originaux, mais l'essentiel du formalisme est standard. Nous introduisons ensuite les deux transformations du tore dont nous allons étudier la version quantifiée : il s'agit des transformations du chat d'Arnold, et de la transformation du boulanger. Ces transformations satisfont toutes les propriétés chaotiques recensées dans le premier chapitre. Nous expliquons comment quantifier ces transformations, puis nous nous attachons plus particulièrement à celle du chat. En effet, le caractère linéaire de la transformation classique permet de définir naturellement des familles (non complètes) d'états propres dont les zéros forment des constellations particulières, plus exactement ces constellations présentent des périodicités non triviales sur le tore : les états propres sont ainsi qualifiés de *cristallins*. La construction de ces états propres est faite en détail dans [2]. Comme elle est assez technique, nous n'en reproduisons ici qu'un embryon, qui nous servira ensuite : nous montrons comment construire des états propres, dont la constellation forme un sous-réseau du tore, invariant par la dynamique classique.

Ces états propres sur réseau forment une portion infime parmi les états propres

du chat, et ils n'existent que pour ces applications-là, aux propriétés arithmétiques très particulières. Le dernier chapitre relate au contraire la description de tous les états propres des deux applications étudiées, avec l'ambition de pouvoir généraliser les résultats à n'importe quelle application classiquement chaotique. Ce chapitre reprend en gros [3], en lui adjoignant un petit commentaire sur le théorème de Schnirelman. Nous voulons en effet, dans ce chapitre, caractériser les fonctions de Husimi des états propres, plus précisément que ne le fait ce théorème. Pour cela, nous mesurons leurs fluctuations par rapport à la densité ergodique, en utilisant une panoplie de 'normes' plus ou moins standard. Nous utilisons également un arsenal d'états de référence très localisés, ou au contraire uniformément répartis sur le tore, et qu'on sait décrire de façon précise dans les diverses représentations. Parmi eux, on attachera un intérêt particulier à l'"état aléatoire" ; en effet, nous observons que les différentes 'normes' des fluctuations prennent pour les états chaotiques des valeurs proches de leurs moyennes sur les ensembles de vecteurs aléatoires. Cette analogie entre états chaotiques et aléatoires est également vérifiée au niveau des constellations de zéros, étudiées dans les deux dernières sections. Nous montrons rigoureusement l'équidistribution des constellations pour les états propres chaotiques, étendant la preuve donnée dans [3] à d'autres géométries que le tore. Cette équidistribution permet de caractériser la phase de la fonction de Bargmann, auquel on n'avait pas accès directement par Schnirelman. Enfin, les corrélations entre les zéros sont calculées dans le cadre du modèle statistique, et leur comparaison avec les états propres chaotiques aboutit à une discussion sur la caractérisation quantitative des cicatrices.

Chapitre 1

Chaos classique et quantique

1.1 Rappels de mécanique classique

Après avoir rappelé quelques bases de mécanique hamiltonienne, nous décrivons succinctement les concepts de la théorie des systèmes dynamiques permettant une classification précise des différents degrés de chaos classiques. Les principales références utilisées dans cette section sont [7, 8, 45, 81, 89, 101].

Nous considérons les systèmes dynamiques définis par la donnée d'un *espace des phases*, c'est-à-dire une variété symplectique (M, ω) de dimension $2d$, qui admet (au moins localement) un système de coordonnées symplectiques $x = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q_1, \dots, q_d, p_1, \dots, p_d)$, telles que la forme symplectique soit donnée par

$$\omega = \sum_{j=1}^d dp_j \wedge dq_j. \quad (1.1)$$

La dynamique sur cet espace est définie

- soit par un hamiltonien $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ engendrant les équations de Hamilton :

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}; \quad (1.2)$$

En intégrant ces équations sur un intervalle de temps $[t_o, t]$, on obtient une application canonique $T_{t_o t} : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$, qu'on peut retrouver (au moins localement) par le biais d'une fonction génératrice $A_{t_o t}(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$:

$$P_j = \frac{\partial A_{t_o t}}{\partial Q_j}, \quad p_j = -\frac{\partial A_{t_o t}}{\partial q_j}. \quad (1.3)$$

Cette fonction correspond (à une constante additive près) à l'intégrale d'action le long de la trajectoire classique allant de \mathbf{q} à \mathbf{Q} dans l'intervalle de temps :

$$A_{tot}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) = \sum_{j=1}^d \int_{t_o}^t p_j(t) \frac{dq_j(t)}{dt} dt. \quad (1.4)$$

Si par hasard la matrice jacobienne $\frac{D(\mathbf{p}, \mathbf{P})}{D(\mathbf{q}, \mathbf{Q})}$ est singulière en un point de l'espace des phases, il faut employer une autre fonction génératrice, déduite de A_{tot} par une transformation de Legendre de certains couples de coordonnées (Q_j, P_j) ; la fonction génératrice obtenue prend alors la forme $\tilde{A}_{tot}(\mathbf{q}, Q_j, P_k)$, où les indices j, k forment une partition de $(1, \dots, d)$.

- soit, plus directement, par une bijection canonique sur l'espace des phases (c'est-à-dire conservant la forme symplectique) $T : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$. Le système dynamique considéré est alors dit à *temps discret*. Comme pour un système hamiltonien, l'application T peut être engendrée par une fonction génératrice $A(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$ (plus généralement $\tilde{A}(\mathbf{q}, Q_j, P_k)$), à travers les équations (1.3).

Par la suite, nous allons essentiellement considérer des systèmes à *un degré de liberté*, c'est-à-dire pour lesquels l'espace des phases est bidimensionnel. Dans ce cas, la forme symplectique ω définit une aire sur cet espace des phases, invariante par la dynamique (la mesure de Liouville). À une dimension, les coordonnées symplectiques seront notées (q, p) .

Si le système est donné par un hamiltonien indépendant du temps (c'est-à-dire si $\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial t} \equiv 0$), alors la dynamique est *intégrable* : l'énergie de la particule est une constante du mouvement, toute trajectoire est alors contenue dans une surface d'énergie $\Sigma_E = \{x \in M \mid H(x) = E\}$. Si le mouvement est borné (par exemple, si $H(x) \rightarrow \infty$ en $|x| \rightarrow \infty$), toute trajectoire régulière (c'est-à-dire correspondant à une énergie E telle que le gradient ∇H ne s'annule pas sur Σ_E) a la topologie d'un cercle, et il existe alors des coordonnées canoniques locales (I, ϕ) (dites action-angle) telles que $H(I, \phi) = H(I)$: les équations de Hamilton sur cette trajectoire se réduisent alors à une rotation uniforme sur ces cercles $I = \text{constante}$, de vitesse $\dot{\phi} = dH/dI$.

Si en revanche ∇H s'annule en un point x_o (supposé isolé) de Σ_E , deux types de dynamiques locales sont possibles. La matrice hamiltonienne de H en x_o [101], donnée par

$$\mathcal{M}[H](x_o) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} & -\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} \end{pmatrix} \Big|_{(q, p)=x_o} \quad (1.5)$$

est de trace nulle, et ses valeurs propres sont soit imaginaires pures, soit réelles. Dans le premier cas (valeurs propres $\pm i\Omega$, pour une fréquence $\Omega > 0$), les trajectoires proches du point fixe x_o seront circulaires, confinées dans un voisinage de x_o : la dynamique est équivalente localement à celle donnée par la forme normale $H_{\text{ellip}} = \pm \Omega/2(Q^2 + P^2)$ (dans des coordonnées symplectiques adaptées). Un tel point fixe est dit *elliptique*. Si au contraire les valeurs propres de $\mathcal{M}[H](x_o)$

sont $\pm\lambda$, avec $\lambda > 0$, le point fixe x_o est dit *hyperbolique*, et la dynamique est localement identique à celle de la forme normale $H_{\text{hyperb}} = \lambda QP$. Dans ce cas, le mouvement n'est *a priori* pas borné dans un voisinage de x_o (bien qu'il puisse l'être globalement dans Σ_E). La surface d'énergie critique $\Sigma_{H(x_o)}$ (appelée *séparatrice*) est constituée localement de trois composantes :

- le point fixe x_o (donné dans les coordonnées ci-dessus par $Q = P = 0$)
- une variété stable $W^s(x)$, correspondant aux x qui convergent vers x_o sous le flot lorsque $t \rightarrow \infty$ (localement, cette variété est donnée par $Q = 0$, $P \neq 0$)
- une variété instable $W^i(x)$, qui correspond aux x qui évoluent vers x_o lorsque $t \rightarrow -\infty$ (localement donnée par $P = 0$, $Q \neq 0$).

Insistons sur le fait que la distinction entre variété stable et instable n'a de sens qu'au voisinage de x_o : il est tout-à-fait possible que ces deux variétés stable et instable n'en forment qu'une seule. Par exemple, dans le cas d'un hamiltonien à double puits $H_{\text{d.p.}} = p^2/2 - q^2/2 + \mu q^4$, pour lequel le potentiel possède un maximum local en l'origine, le point fixe $x_o = (0, 0)$ détermine une séparatrice en forme de 8, puisque ses variétés stable et instable se connectent hors du voisinage de x_o (voir figure 1.1). Une telle trajectoire est appelée *homocline* ; la particule qui la décrit (dans le sens du temps, ou à rebours) rejoint le point fixe en un temps infini. Comme la dynamique est continue, cela signifie que les particules d'énergie proche de $0 = H_{\text{d.p.}}(x_o)$ ralentissent énormément lorsqu'elles approchent de x_o , avant de s'en échapper finalement (cf. les trajectoires E_- et E_+ sur la fig. 1.1).

Dans le chapitre 2.2, nous étudierons la quantification de l'hamiltonien de point hyperbolique pur, c'est-à-dire de la forme normale $H_{\text{hyperb}}(Q, P) = \lambda PQ$ (par un changement d'échelle de temps, on peut prendre $\lambda = 1$). Le mouvement n'est alors pas borné (si ce n'est celui du point fixe $x_o = (0, 0)$), de sorte que les fonctions propres ne seront pas normalisables : elles correspondent à des états de diffusion. Néanmoins, le comportement de ces fonctions propres au voisinage de x_o est comparable à celui de fonctions propres normalisées d'un hamiltonien quantique du type de $H_{\text{d.p.}}$ de même énergie.

1.1.1 Dynamique réduite

Les choses deviennent plus complexes dès qu'on s'intéresse à un hamiltonien bidimensionnel $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$. Celui-ci est intégrable si et seulement si il existe une constante du mouvement indépendante de l'énergie, ou encore s'il existe un système de coordonnées symplectiques $(I_1, I_2, \phi_1, \phi_2)$ tel que l'énergie ne dépende que des deux premières : $H = H(I_1, I_2)$. La dynamique consiste alors plus ou moins en un 'produit cartésien' de deux dynamiques unidimensionnelles ; en particulier, si la dynamique est bornée, l'espace des phases peut se diviser en une réunion de sous-variétés $\{I_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = I_1, I_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = I_2\}$ ayant la topologie d'un tore. Toute trajectoire décrit alors une 'birotation' $\dot{\phi}_1 = \omega_1, \dot{\phi}_2 = \omega_2$ sur un de ces tores ; selon la commensurabilité des deux fréquences ω_1, ω_2 , les trajectoires

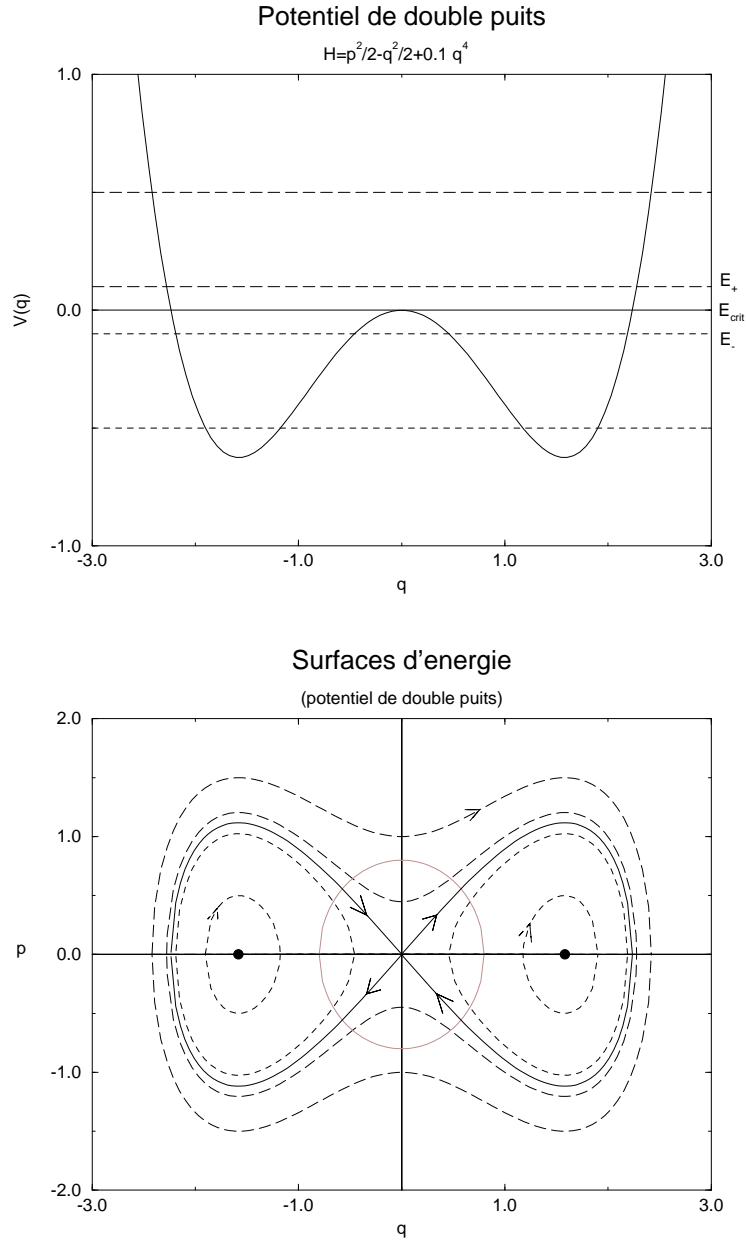


FIG. 1.1 – En haut, le potentiel de double puits, intersecté par cinq valeurs de l'énergie. En bas les courbes Σ_E correspondant à ces énergies : en gras, la séparatrice correspond à l'énergie nulle ; l'origine est un point fixe hyperbolique, dont les variétés stable et instable sont déterminées par le sens des flèches (elles se connectent hors du voisinage du point fixe : celui-ci est en fait un point homocline). Les deux cercles pleins marquent des points elliptiques correspondant aux fonds des puits. Le cercle central entoure une zone où la dynamique est bien décrite par la forme normale $H_{\text{hyperb.}}$.

seront périodiques ou au contraire denses sur le tore. Quoi qu'il arrive, elles ne peuvent s'échapper d'une surface de codimension 2 dans l'espace des phases [7].

Si au contraire la seule constante du mouvement est l'énergie, rien n'empêche alors une trajectoire de visiter n'importe quel voisinage de la surface d'énergie, qui forme une variété de codimension 1. Le mouvement est alors dit non intégrable. Pour pouvoir l'analyser plus facilement, on a recours à l'étude de la *dynamique réduite* : on transforme le système hamiltonien bidimensionnel en un système à temps discret agissant sur un espace des phases réduit, qui consiste en une sous-variété bidimensionnelle Σ de Σ_E , appelée section de Poincaré.

Pour un hamiltonien quelconque, on s'arrange pour placer la section de façon *transverse* au flot hamiltonien ; par exemple, on pourra considérer la section $\Sigma = \{q_1 = 0\} \cap \Sigma_E$ si tous les points de Σ vérifient $\dot{q}_1 \neq 0$. On considère alors le système dynamique à temps discret qui, à tout point $y = (0, q_2, p_1, p_2)$ de Σ tel que $\dot{q}_1 > 0$, associe le point Ty de premier retour de y sur Σ par le flot hamiltonien, tel que $\dot{q}_1 > 0$ (autrement dit, on ne considère que les points d'intersection de la trajectoire avec la section traversant celle-ci dans un sens bien défini). En choisissant les coordonnées (q_2, p_2) sur Σ (la valeur de p_1 étant fixée par l'équation $H(0, q_2; p_1, p_2) = E$), cette section admet la structure symplectique réduite $\omega|_\Sigma = dq_2 \wedge dp_2$, et l'application de Poincaré $y = (q_2, p_2) \mapsto Ty = (q'_2, p'_2)$ est automatiquement canonique.

Pour certains systèmes hamiltoniens, comme les billards bidimensionnels, il existe une réduction 'naturelle' qui consiste à ne regarder que les positions et les angles des rebonds successifs de la particule sur les bords du billard. En appelant q l'abscisse curviligne le long du bord et $p = \sin \theta$ la coordonnée donnant l'angle du choc par rapport à la normale ((q, p) sont les coordonnées de Birkhoff), l'application résultante est canonique, et elle capture le caractère non-trivial du mouvement.

Même dans le cas d'hamiltoniens bidimensionnels plus compliqués, il semble que la substantifique moëlle de la dynamique (classique) peut être extraite de ce formalisme réduit (quitte à considérer plusieurs sections de Poincaré) [89]. D'autre part, celui-ci est beaucoup plus économique à mettre en œuvre numériquement et graphiquement : on visualise plus aisément des points sur une surface bidimensionnelle que des trajectoires dans une variété à trois dimensions.

Les transformations à temps discret apparaissent également lors de l'étude d'hamiltoniens unidimensionnels dépendant explicitement du temps (auquel cas il n'y a pas d'énergie conservée). Plus précisément, le formalisme réduit est simple à mettre en œuvre lorsque la dépendance est périodique (disons de période 1) : on peut alors simplement regarder l'application stroboscopique T qui à tout point (q, p) associe son image par le flot au temps 1. Un grand nombre d'applications étudiées en pratique peuvent être construites de la sorte ; à cet effet, on utilise beaucoup des hamiltoniens pulsés, c'est-à-dire de la forme

$$H(q, p, t) = H_0(q, p) + H_1(q, p) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - n). \quad (1.6)$$

1.1.2 Analyse locale de stabilité

L'analyse de stabilité autour d'un point fixe hamiltonien faite dans la section précédente peut être transposée aux applications (sur une espace Σ bidimensionnel) : un point fixe $y_o = T y_o$ (plus généralement un point périodique $y_o = T^n y_o$) sera stable (resp. instable) si les valeurs propres de la matrice jacobienne DT^n sont deux phases conjuguées $e^{\pm i\Omega_n}$ (resp. deux valeurs réelles $\epsilon e^{\pm \lambda_n}$, où $\epsilon = \pm 1$). Nous nous intéresserons exclusivement au second cas ; λ_n/n est appelé l'exposant de Lyapunov de l'orbite périodique $\{T^j y_o, j = 0, \dots, n-1\}$, il détermine son taux d'instabilité, autrement dit la rapidité avec laquelle les trajectoires voisines s'éloignent. Les espaces propres de DT^n ($E^i(y_o)$ associé à ϵe^{λ_n} , $E^s(y_o)$ à $\epsilon e^{-\lambda_n}$) définissent les germes de variétés $W^i(y_o)$ (instable) et $W^s(y_o)$ (stable) similaires à celles qui apparaissent pour un point fixe hyperbolique d'un système hamiltonien. Un point de $W^s(y_o)$ convergera vers l'orbite périodique $\{T^j y_o\}$ lorsque $t \rightarrow \infty$, par une succession de points au lieu d'une trajectoire continue. Ces notions de stabilité ne se restreignent pas au cas des points périodiques : on définit l'exposant de Lyapunov d'un point y_o quelconque par la limite de λ_n/n lorsque $n \rightarrow \infty$ (si elle existe). Si cet exposant est positif, le point y_o (qualifié d'hyperbolique) admet les variétés stable et instable

$$W^i(y_o) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \Sigma \mid |T^n y - T^n y_o| \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \pm\infty\}.$$

1.1.3 Classification des applications chaotiques

Ces notions *locales* permettent de procéder à une classification des systèmes dynamiques chaotiques. On se place dans le cadre réduit, et dans le cas où l'espace des phases est borné (de sorte qu'aucune trajectoire ne s'échappe à l'infini). Le chaos provient en effet de la concomitance de l'*hyperbolicité* locale avec la *réurrence* des trajectoires (or pour un espace des phases compact, le théorème de retour de Poincaré montre que tout point revient dans son voisinage après un certain temps). Ces deux ingrédients ne sont pas réunis pour H_{hyperb} , agissant dans le plan, mais elles le seront si on projette son action sur le tore (application du boulanger, du chat d'Arnold).

On dit que l'application T satisfait la condition d'Anosov (ou simplement, est une application d'Anosov) si tous les points de Σ sont hyperboliques, et si leurs exposants de Lyapunov λ_y sont minorés uniformément sur Σ par $\Lambda > 0$. Dans ce cas, on montre que les orbites périodiques sont denses dans Σ , bien qu'elles y forment un ensemble de mesure nulle dans Σ (pour la mesure de Liouville). On montre également que pour ces systèmes, presque toutes les orbites ont le même exposant de Lyapunov λ : l'instabilité est donc uniforme sur Σ .

Un moyen de caractériser la 'chaoticité' d'un système consiste à calculer son entropie de Kolmogorov-Sinai $h(T)$ [45], qui est définie à partir de partitions $\{A_1, \dots, A_r\}$ de l'espace des phases. Pour une telle partition, on peut localiser

de mieux en mieux la position initiale y_o d'une particule en progressant dans la suite $A_{j_0}, A_{j_1}, A_{j_2} \dots$ définie par $T^k y_o \in A_{j_k}$; on peut alors définir la quantité d'information fournie par le passage du rang k au rang $k+1$: ceci définit l'entropie de T associée à la partition $\{A_1, \dots, A_r\}$; l'entropie de Kolmogorov–Sinai est donnée par la borne supérieure par rapport à toutes les partitions. Un système ayant une entropie strictement positive est appelé un K-système.

Pour un système d'Anosov sur Σ , cette entropie est donnée simplement par $h(T) = \lambda$, l'unique exposant de Lyapunov positif. C'est donc un K-système.

Un K-système possède des propriétés chaotiques plus intuitives que celles qui le définissent. On montre qu'il est *mélangeant*, et par conséquent qu'il est *ergodique* [45]. Ces deux propriétés sont définies pour tout système dynamique donné par une application T sur un espace mesuré (Σ, μ) tel que la mesure μ soit invariante par T (pour les applications canoniques considérées, μ peut être par exemple concentrée sur une orbite périodique). Le système dynamique (Σ, μ, T) a la propriété de mélange ssi, pour toutes fonctions $f, g \in L^2(\Sigma, \mu)$,

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \int_{\Sigma} f(T^n x) g(x) d\mu(x) = \mu(f) \mu(g) \quad (1.7)$$

(en notant $\mu(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Sigma} f(x) d\mu(x)$).

Pour un système dynamique quelconque, le théorème de Birkhoff–Khinchin nous assure que la moyenne temporelle

$$\bar{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \quad (1.8)$$

existe, et que $\mu(\bar{f}) = \mu(f)$. Le système est dit *μ -ergodique* si cette moyenne est indépendante de la position initiale x (à un ensemble μ -négligeable près) :

$$\text{pour presque tout } x \in \Sigma, \quad \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \mu(f). \quad (1.9)$$

Cela revient à dire que presque toute trajectoire visite l'espace des phases de façon dense et uniforme. L'ergodicité est une conséquence de la propriété de mélange, mais l'inverse est faux. En effet, si l'on considère la dynamique discrète sur le 2-tore donnée par la translation

$$(q, p) \mapsto (q + \alpha_q, p + \alpha_p) \quad (1.10)$$

avec des périodes (α_q, α_p) incommensurables, on voit aisément que toute trajectoire est dense et ergodique ; cependant, le système n'est ni hyperbolique, ni mélangeant. Pourtant, cette *translation irrationnelle* sur le tore constitue un exemple de dynamique *totalelement ergodique* [45] : la limite temporelle $1/n \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)$ converge vers $\mu(f)$ *uniformément* sur le tore. Pour une application canonique sur

Σ , la mesure invariante μ par défaut est toujours la mesure de Liouville $\omega|_{\Sigma}$: l'application T sur Σ sera donc dite ergodique si elle l'est vis-à-vis de ω . Cependant, le même système dynamique (Σ, T) peut être ergodique vis-à-vis de deux mesures invariantes différentes μ_1, μ_2 . Dans ce cas, elles sont forcément mutuellement singulières. Par exemple, pour une application canonique T ω -ergodique, l'orbite périodique $\{T^j y_o, j = 0, \dots, n-1\}$ définit une mesure invariante $1/n \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{T^j y_o}$, vis-à-vis de laquelle T est trivialement ergodique ; il est clair que cette mesure est singulière par rapport à ω .

Avant de passer au problème quantique, nous signalons brièvement une formulation duale de la dynamique classique : le système (Σ, μ, T) définit naturellement un opérateur unitaire \mathcal{U}_T agissant sur $L^2(\Sigma, \mu)$, par $(\mathcal{U}_T f)(x) = f(Tx)$. Une fonction constante sur Σ sera évidemment fonction propre de \mathcal{U}_T de valeur propre 1. On montre que T est μ -ergodique si et seulement si les seules fonctions invariantes sont les constantes (les mesures invariantes singulières ne sont pas dans $L^2(\Sigma, \mu)$). En ce sens, l'ergodicité est une propriété *spectrale* du système [45]. Il en est de même de la propriété de mélange. Ce point de vue, dual par rapport aux équations de mouvement locales, est en fait bien adapté au passage à l'étude du système quantifié, pour lequel on peut également définir des mesures (dites quantiques, ou semi-classiques) sur l'espace des phases, sur lesquelles agit le propagateur quantique. Comme on le verra dans la suite, l'objectif de l'analyse semi-classique est de caractériser ces mesures quantiques, en les comparant aux quantités invariantes classiques.

1.1.4 Quantification de transformations à temps discret

Le formalisme de Weyl (voir éq. (2.10)) donne un procédé de quantification des observables sur l'espace des phases, donc en particulier de l'hamiltonien. Par exponentiation, on peut donc définir l'opérateur d'évolution quantique (ou propagateur) associé à une dynamique hamiltonienne. Nous donnons la formule dans le cas général d'un hamiltonien dépendant explicitement du temps : il faut alors ordonner dans le temps l'exponentielle, puisque les opérateurs $\hat{H}(t)$ à des instants différents peuvent ne pas commuter (c'est ce que symbolise la lettre \mathcal{T}) :

$$U_{t_o t} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_o}^t \hat{H}(t') dt'}, \quad \text{avec } \hat{H}(t) = Op^W(H(q, p, t)). \quad (1.11)$$

Un tel propagateur est automatiquement unitaire, puisque \hat{H} est hermitien par quantification de Weyl (c'est également le cas si on utilise la quantification anti-Wick). Une fois définis, on peut alors étudier la nature de ces opérateurs d'évolution lorsque \hbar est petit, c'est-à-dire dans la limite semi-classique. On obtient, dans la représentation de Schrödinger, la formule de Van Vleck, qui s'exprime en terme des actions classiques génératrices du flot (cf. éq. 1.3, 1.4) :

$$\langle Q | U_{t_o t} | q \rangle \sim \frac{1}{(2i\pi\hbar)^{d/2}} \sum_{\text{trajectoire } j} \det \left(-\frac{\partial^2 A_{t_o t}^{(j)}(Q, q)}{\partial Q \partial q} \right)^{1/2} e^{\frac{i A_{t_o t}^{(j)}(Q, q)}{\hbar}}, \quad (1.12)$$

où chaque trajectoire classique j reliant q à Q entre t_o et t est engendrée par l'action $A_i^{(j)}(Q, q)$. Cette expression n'est valable qu'asymptotiquement, à t fixé et $\hbar \rightarrow 0$. En particulier, l'opérateur correspondant exactement au membre de droite n'est en général pas unitaire (sauf dans le cas où la dynamique est linéaire, c'est-à-dire lorsque l'hamiltonien et les actions sont quadratiques dans les coordonnées). Cette formule peut s'obtenir formellement par un argument de phase stationnaire appliqué à l'intégrale de Feynman donnant le propagateur [25].

Si maintenant on s'intéresse à une transformation T à temps discret, il n'existe pas de manière canonique de quantifier T [23]. Si la transformation est une application de Poincaré d'un système hamiltonien de dimension supérieure (par exemple 2), on peut bien entendu définir par (1.11) un propagateur $U_{t_o t}$ agissant sur $L^2(\mathbb{R}^2)$, mais transformer celui-ci en un opérateur unitaire agissant uniquement sur des fonctions d'onde définies sur la section de Poincaré n'est a priori pas évident [29, 107].

Si la transformation correspond à une vision stroboscopique (aux temps entiers) d'un hamiltonien unidimensionnel dépendant du temps $H(q, p, t)$, on peut alors utiliser la formule (1.11), en restreignant t à des valeurs entières. C'est ce qu'on fait en général pour quantifier les systèmes pulsés (1.6). Le propagateur à temps 1 de ce type d'hamiltonien est alors :

$$U = e^{-i\hat{H}_0/\hbar} e^{-i\hat{H}_1/\hbar} . \quad (1.13)$$

Néanmoins, un choix arbitraire se cache dans cette formule. En effet, d'une part la transformation canonique qu'on veut quantifier peut être engendrée par une *infinité* de flots hamiltoniens $H(q, p, t)$ distincts (même en exigeant que H soit périodique par rapport au temps). Or, *a priori*, chaque flot déterminera un propagateur quantique (1.11) différent.

Si maintenant on cherche à quantifier une application canonique T définie *ex nihilo*, on se trouve alors totalement démuné d'une quelconque prescription de quantification. On ne s'impose qu'une condition semi-classique, par analogie avec la formule de Van Vleck : une quantification *bona fide* de la transformation T consistera en une famille d'opérateurs unitaires $U_T(\hbar)$ admettant le développement suivant dans la limite $\hbar \rightarrow 0$ [94, 29] :

$$\langle Q|U_T(\hbar)|q\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{2i\pi\hbar}} \sum_j \left(-\frac{\partial^2 A^{(j)}(Q, q)}{\partial Q \partial q} \right)^{1/2} e^{\frac{i}{\hbar} A^{(j)}(Q, q)} . \quad (1.14)$$

où les $A^{(j)}(Q, q)$ correspondent aux fonctions génératrices des différentes orbites possibles $(q, p^{(j)}) \mapsto (Q, P^{(j)}) = T(q, p^{(j)})$. Si la transformation est engendrée par des fonctions $\tilde{A}^{(j)}(P, q)$, on obtient alors l'expression de U en représentation *mixte* $\langle P|U|q\rangle$, donnée par la formule analogue à (1.14) ; ce sera par exemple le cas pour la transformation du boulanger (v. section 3.3.2).

Comme dans le cas hamiltonien, le membre de droite de (1.14) ne sera en général unitaire que dans la limite semi-classique. Pour les transformations canoniques sur le tore décrites dans la section 1.1, on sait obtenir une (voire plusieurs) quantification exacte (cf. section 3.3), qui consiste alors en une suite infinie de matrices unitaires $N \times N$: on appelle cette suite une *application quantique* correspondant à la transformation classique T . Notre objectif est l'étude des vecteurs propres de ces matrices (et plus particulièrement leurs densités de Wigner ou de Husimi sur le tore), dans cette limite. Ce type d'étude fait partie des diverses problématiques concernant la quantification de systèmes classiques chaotiques ; ces problématiques sont généralement regroupées sous le terme générique de 'chaos quantique'.

1.2 Chaos quantique

1.2.1 Quelques systèmes physiques ?

Les premiers systèmes dynamiques sur lesquels ont été identifiés des propriétés chaotiques relèvent de la mécanique céleste : les structures hyperboliques fondamentales (points homoclines, séparatrice, divergence exponentielle des orbites voisines) ont été analysées par Poincaré pour le problème des trois corps en interaction gravitationnelle. Par la suite, on s'est rendu compte que de nombreux systèmes dynamiques réalistes présentaient ces caractéristiques, au moins dans certaines parties de l'espace des phases. Parallèlement, des modèles mathématiques simples ont été introduits, en guise de 'prototypes'. Pour les modèles conservatifs, citons par exemple le flot géodésique sur une surface compacte de courbure négative constante [63], les applications canoniques hyperboliques sur le tore [8], certains billards bidimensionnels [45] ; pour tous ces systèmes, on a une preuve rigoureuse des propriétés chaotiques (au moins de certaines d'entre elles).

Le problème de la quantification des systèmes non intégrables s'est posé dès l'aube de la mécanique quantique [54], puisqu'il apparaît dès qu'on cherche le spectre de l'atome d'hélium, qui est la version microscopique du problème des trois corps en interaction en $1/r^2$. Les chimistes ont alors utilisé des méthodes perturbatives, bien adaptées au calcul des premiers états excités, ou des méthodes variationnelles du type Hartree-Fock. Il fallut attendre quelques dizaines d'années avant de pouvoir créer en laboratoire des atomes ou molécules 'semi-classiques', c'est-à-dire dont les nombres quantiques sont de l'ordre de plusieurs dizaines, pour lesquels les électrons sont presque sur des trajectoires classiques. Pour ce type de système (appelé atome ou molécule de Rydberg), une approche semi-classique devient pertinente. La nécessité de considérer le caractère classiquement chaotique de ce type de systèmes est clairement apparu lors d'expériences d'ionisation d'atomes en présence de champs magnétiques ou de micro-ondes [18, 39] : en

plongeant un atome de Rydberg dans un champ micro-onde de faible intensité, on a observé un taux d'ionisation (nécessairement multiphotonique) anormalement élevé en comparaison des calculs perturbatifs usuels. On a pu l'expliquer en interprétant cette ionisation comme un mécanisme relevant de la mécanique classique d'une particule chargée dans un champ électromagnétique : on parle alors de photo-ionisation diffusive, par analogie à la diffusion d'une particule classique dans tout l'espace des phases pour un système chaotique. Ces expériences d'ionisation font donc intervenir les aspects dépendants du temps de la dynamique chaotique. Il ressort d'une étude plus poussée que l'analogie avec la diffusion classique est en fait limitée par le phénomène de *localisation dynamique* : si on continue à faire évoluer le système quantique, les interférences quantiques stoppent la diffusion classique de l'électron, d'une manière analogue au phénomène de localisation dans les métaux désordonnés.

Parallèlement, le spectre et les états propres de systèmes atomiques simples classiquement chaotiques a été traité par des techniques semi-classiques (formule des traces, cf. éq.(1.16)), et également statistiques (théorie des matrices aléatoires, v. plus bas). Parmi les systèmes les plus simples, citons l'atome d'hélium [27] et l'atome d'hydrogène en présence d'un champ micro-onde ou d'un champ magnétique constant [49]. Il a ainsi été possible d'identifier les orbites périodiques les plus courtes des systèmes classiques à partir des spectres expérimentaux. Dans les cas où le système est très chaotique (atome d'hydrogène dans un champ magnétique intense), on a pu montrer que la statistique des niveaux d'énergie était en très bon accord avec la théorie des matrices aléatoires. En revanche, il semble plus difficile d'avoir accès expérimentalement aux caractéristiques des états propres : on a juste noté que les états liés dont l'énergie est sur un pic de "résonance quasi-Landau" doivent avoir une probabilité importante de se trouver près du noyau de l'atome, autrement dit doivent présenter une cicatrice le long de l'orbite cyclotron [49].

Plus récemment, les progrès des techniques d'épitaxie en physique des solides ont permis la fabrication de composés électroniques *bidimensionnels*, en piégeant les électrons libres entre deux couches de semi-conducteurs différents, et de très petite taille (\lesssim au micron), donc pour lesquels les effets de décohérence des fonctions d'onde peuvent être négligés en première approximation ; ces systèmes sont communément appelés systèmes 'mésoscopiques'. On peut ainsi graver 'sur mesure' des cavités bidimensionnelles de forme donnée ; en se plaçant dans l'approximation de liquide de Fermi, c'est-à-dire en supposant que les porteurs de courant sont des quasi-particules sans interaction, on a donc une réalisation microscopique de billards quantiques bidimensionnels [121]. Ces cavités peuvent être soit ouvertes (c'est-à-dire connectées à deux fils conducteurs), soit fermées (c'est-à-dire connectées à deux jonctions tunnel). On mesure généralement les variations de conductivité électrique entre les deux extrémités en fonction de l'énergie de Fermi. Lorsque le composé est suffisamment pur pour qu'on puisse considérer

que le transport électronique est *balistique* (par opposition à *diffusif*, pour les composés plus ‘sales’), on a remarqué que les propriétés statistiques des fluctuations de conductivité étaient reliées à la nature de la dynamique classique dans la cavité [121], comme c’est le cas pour la statistique des énergies des états liés. La présence d’un fort pic de conductivité signifie que la fonction d’onde de l’état propre à l’énergie de Fermi présente une grande intensité au niveau de la jonction tunnel : si par hasard cette jonction se trouve sur un rebond d’une orbite périodique du billard classique, on peut interpréter un pic de conductivité comme une cicatrice de cette orbite sur l’état lié. Outre les fluctuations de conductivité, la nature (chaotique ou intégrable) de la dynamique classique est également caractérisée par les effets de *localisation faible* sur la magnétorésistance des cavités. En effet, la résistance de la jonction est reliée semi-classiquement aux interférences quantiques entre des trajectoires classiques de même action ; comme l’action d’une trajectoire dépend du champ magnétique appliqué, la dépendance de la résistance par rapport au champ magnétique fournit des informations sur la statistique des actions des trajectoires classiques, donc sur la dynamique classique [37]. Plus récemment, l’étude de diodes à effet tunnel résonnant en présence de champ magnétique a également mis en évidence l’influence des orbites périodiques classiques à l’intérieur d’une double barrière de potentiel pour expliquer les fluctuations de conductance reliées aux états métastables ; là encore, un pic de conductivité est associé (de façon plutôt qualitative) à une cicatrice due à une orbite instable [59].

L’étude de ces systèmes mésoscopiques a souvent constitué un pont naturel entre le chaos quantique et les systèmes désordonnés, puisque la frontière entre transports balistique et diffusif reste expérimentalement assez difficile à définir : on a donc cherché à unifier les deux situations, par exemple en employant des modèles de matrices aléatoires [35], ou plus récemment des méthodes de théorie des champs supersymétriques [6, 134] ; on verra effectivement que les fonctions propres chaotiques présentent de fortes similitudes avec des états aléatoires.

Enfin, puisque l’équation de Schrödinger d’un électron dans un billard est équivalente à l’équation de Helmholtz avec conditions au bord de Dirichlet, on a réalisé des billards quantiques macroscopiques en utilisant des cavités micro-onde quasi-bidimensionnelles de forme arbitraire, sur lesquelles on sait mesurer expérimentalement l’intensité des champs électriques, donc l’intensité des fonctions d’onde quantiques, et observer les cicatrices prédites par les calculs numériques [119, 120].

1.2.2 Problématiques du chaos quantique

Sur un plan plus théorique, s’est posé le problème de la correspondance classique–quantique pour une dynamique chaotique. En clair : le chaos étant un phénomène de mécanique classique, et étant donné le principe de correspon-

dance, comment identifier les manifestations du chaos classique dans les données quantiques ? C'est cette vaste question qu'on regroupe sous le terme de 'chaos quantique'.

Je mets le terme entre guillemets pour la raison suivante : tout système quantique lié ayant un nombre fini de degrés de liberté est intégrable au sens de Liouville. Une fois qu'on a décomposé un état initial sur une base d'états propres, l'évolution dans le temps, donnée par l'équation de Schrödinger, est quasi-périodique. Il n'y a donc jamais de divergence exponentielle entre deux états initiaux proches, au sens de la métrique hilbertienne. L'évolution quantique, vue comme un système dynamique dans l'espace de Hilbert, n'est donc pas chaotique.

Pour tenter de retrouver une trace d'hyperbolicité au niveau quantique, on peut étudier l'évolution de paquets d'onde quasi-ponctuels : ces états minimisent les relations d'incertitude de Heisenberg, donc ils sont localisés dans l'espace des phases sur une cellule de taille $\propto \hbar^d$. Pour une durée d'évolution fixée, le théorème d'Ehrenfest montre qu'un tel état va effectivement évoluer comme une particule classique, dans la limite $\hbar \rightarrow 0$. Cependant, si le système classique est chaotique, deux points voisins d'une distance $\sim \sqrt{\hbar}$ vont s'éloigner classiquement à une vitesse exponentielle : ils seront totalement décorrélés au temps d'Ehrenfest $t_E = |\log \hbar|$. Pour des temps $t > t_E$, le paquet d'onde est donc complètement délocalisé dans l'espace des phases, et son évolution ne peut plus être décrite semi-classiquement. Il n'est donc pas concevable de retrouver les propriétés classiques (ergodicité, mélange) en adaptant simplement les formules à l'évolution de ce paquet d'onde (puisque ces formules font toujours intervenir la limite $t \rightarrow \infty$). Autrement dit, une particule quantique ne peut 'voir' les structures infiniment fines (enchevêtrement des orbites stable et instable près d'un point fixe) caractérisant le chaos classique.

Ce type de phénomène exprime en fait la *non-commutativité* des limites $t \rightarrow \infty$, $\hbar \rightarrow 0$, qui est au cœur du problème.

1.2.3 Quantités invariantes

Face à cette barrière temporelle pour l'étude semi-classique de l'évolution quantique, une approche alternative consiste à comparer les quantités *invariantes dans le temps* des dynamiques classique et quantique. Pour la dynamique classique, ce sont essentiellement les densités dans l'espace des phases invariantes par la dynamique (par exemple les orbites périodiques) ; au niveau quantique, le spectre et les états propres du propagateur (ou de l'hamiltonien).

États propres

Pour comparer les états propres aux densités classiques, on doit les représenter par des fonctions sur l'espace des phases, permettant de mesurer leur concentra-

tion dans cet espace, dite concentration *microlocale* (l'adjectif *local* étant réservé à l'espace des positions). On utilise en général deux types de densités microlocales (appelées également densités de mesure semi-classiques), toutes deux bilinéaires dans la fonction d'onde et normalisées à l'unité (cf. section 2.1).

La fonction de Wigner $W_\psi(q, p)$ est invariante par transformation symplectique des coordonnées, mais elle peut prendre des valeurs négatives en certains points, et ne définit donc pas vraiment une mesure de probabilité. En lissant W_ψ par une gaussienne, on obtient la fonction de Husimi $H_\psi(q, p)$, qui n'est plus invariante symplectique, mais qui est positive ou nulle, et présente des propriétés analytiques intéressantes (dans le cas d'un état pur, elle est multiple de la norme au carré d'une fonction holomorphe). Ces propriétés permettent d'inverser le processus, c'est-à-dire reconstruire la fonction d'onde à partir de sa densité de Husimi. Elle permettront également de caractériser exactement l'état à partir des zéros de H_ψ : on obtient ainsi une représentation des états quantiques en terme d'un ensemble de points (ou *constellation*) dans l'espace des phases, appelée représentation *stellaire*. C'est cette représentation (multiplicative) que nous nous proposons d'étudier ici, pour un cas intégrable (chap. 2.2) et surtout pour des dynamiques chaotiques sur le tore (chapitre 4).

Que sait-on sur ces densités microlocales ?

Pour un système intégrable, on connaît précisément la forme asymptotique des mesures semi-classiques des états propres. L'approximation WKB fournit en effet des estimations uniformes de ces mesures (au moins dans le cas d'une énergie non singulière), qui montrent effectivement une forte convergence vers les mesures concentrées sur les tores invariants. On retrouvera ce phénomène dans l'étude de l'hamiltonien hyperbolique pur H_{hyperb} , y compris sur la séparatrice (section 2.2).

Pour un système ergodique (c'est-à-dire pour lequel presque toutes les trajectoires couvrent l'espace des phases de façon dense), on connaît beaucoup moins bien le lien entre mesures invariantes classiquement et densités microlocales d'états propres. On sait seulement que ces densités convergent semi-classiquement (au sens faible) vers la mesure de Liouville sur Σ_E (ou sur la section de Poincaré pour une dynamique à temps discret) : cette *équidistribution* des densités constitue le théorème de Schnirelman, que nous détaillerons plus loin (section 4.3).

Cette propriété en mesure est loin d'être aussi précise que les approximations WKB pour les systèmes intégrables. En particulier, elle laisse la porte ouverte à une zoologie de phénomènes possibles à l'ordre sous-dominant (c'est-à-dire invisibles au sens de la mesure, mais néanmoins détectables dans des topologies plus fines). En particulier, de nombreux calculs numériques semblent indiquer dans certains cas la présence de fortes concentrations de la densité semi-classique (ou, dans l'espace de configuration, du carré de la fonction d'onde) le long d'orbites périodiques classiques (qui sont, nous le rappelons, isolées et instables). Ce phénomène, découvert par Heller sur les billards quantiques [70], porte le nom

de *cicatrice*. Leur interprétation semi-classique reste insatisfaisante : la formule des traces (v. plus bas, éq. (1.16)) permet de les expliquer à condition de prendre la moyenne des densités sur un grand nombre d'états propres [30, 22], mais leur présence au niveau des états propres individuels reste problématique (des résultats dans ce sens ont néanmoins été obtenus [4]). Un compte-rendu plus détaillé de ces travaux est donné dans la section 4.7.3. Dans le cas des applications quantiques étudiées dans la suite, nous tenterons de définir quantitativement la présence d'une cicatrice (sans chercher à les expliquer semi-classiquement), en particulier au niveau des représentations stellaire et de Husimi.

On a vu que la classification des systèmes classiques comprend plusieurs niveaux de 'chaoticité', allant de la simple ergodicité à la propriété d'Anosov. Il serait souhaitable d'identifier cette hiérarchie au niveau quantique : le théorème de Schnirelman ne caractérise que l'ergodicité de la dynamique classique ; il est également possible de caractériser au niveau des fonctions propres la propriété de mélange du système classique (dans un sens un peu plus faible que celle décrite par l'équation (1.7)) [131]. Les cicatrices fourniraient une classification encore plus précise, induisant un lien direct entre fonctions propres et orbites périodiques classiques.

Spectres chaotiques

Avant de s'intéresser aux fonctions d'onde (qui sont a priori très complexes dès qu'on s'intéresse à un système réaliste), les recherches se sont d'abord concentrées sur les *spectres* des hamiltoniens non intégrables (cf. la section 1.2.1). Il semble en effet possible de caractériser grossièrement la nature du système dynamique classique en étudiant les propriétés dudit spectre.

Ce dernier est donné par la densité spectrale $d(E) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n \delta(E - E_n)$; cette distribution peut être lissée sur différentes échelles, sachant que l'écart entre deux niveaux consécutifs est d'ordre \hbar^d ($2d$ est la dimension de l'espace des phases). Pour une fenêtre de lissage macroscopique, la densité spectrale moyenne $\bar{d}(E)$ est donnée par la formule de Weyl :

$$\bar{d}(E) \sim \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int dq dp \delta(E - H(q, p)), \quad (1.15)$$

c'est-à-dire que $\bar{d}(E)$ est proportionnelle à la surface de Σ_E : cette densité moyenne dépend donc de la géométrie du système classique. Pour des lissages plus fins, cette formule nécessite des corrections en \hbar , qui sont de deux natures : d'une part, ce terme dominant doit être corrigé par une série (divergente) du type $\sum_n d_n \hbar^n$, qui inclut également des effets géométriques de Σ_E . D'autre part, la densité présente des oscillations de plus en plus serrées lorsque $\hbar \rightarrow 0$, qu'on obtient semi-classiquement par la *formule des traces* [14, 62] : celle-ci relie, par une sorte de formule de Poisson, les oscillations de la densité spectrale aux orbites

périodiques classiques. En utilisant les notations de Berry dans [64], on a donc, à l'ordre dominant en \hbar :

$$d(E, \epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n \delta_\epsilon(E - E_n) \approx \bar{d}(E) + \frac{1}{h} \sum_p A_p(E) e^{-\epsilon T_p(E)/\hbar} e^{i(S_p(E)/\hbar + \gamma_p)}. \quad (1.16)$$

δ_ϵ est une lorentzienne de largeur ϵ , qui sert à lisser $d(E)$. Chaque indice p correspond à une orbite périodique d'énergie E (supposée isolée), d'action classique $S_p(E)$, d'indice de Maslov γ_p et $A_p(E)$ est relié à la stabilité de l'orbite : toutes ces données sont donc purement classiques. Une formule analogue existe pour le spectre d'opérateurs unitaires correspondant à des applications quantiques classiquement chaotiques [122] : les valeurs propres sont alors des pseudo-énergies $e^{i\theta_n}$.

Cette formule, qui est à la base de la plupart des approches semi-classiques des spectres 'chaotiques', n'est rigoureusement prouvée que dans la limite $\hbar \rightarrow 0$, et elle nécessite un lissage ϵ qui rend impossible l'identification des niveaux individuels dans cette limite. Sans ce lissage, la somme diverge violemment, du fait de la prolifération exponentielle des orbites périodiques pour un système chaotique. Il semble néanmoins possible de s'affranchir de cette divergence par une resommation 'à la main' de la série, qui revient plus ou moins à la tronquer en ne conservant que les orbites de période $\leq \pi \hbar \bar{d}(E)$ [24].

Une formule semi-classique généralisant (1.16) donne accès aux fonctions de Wigner des états propres, toujours en moyennant sur une fenêtre en énergie de largeur ϵ . On se contentera ici de la formule obtenue par Berry pour un système hamiltonien autonome H_o en dimension D :

$$W(x; E, \epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n W(x, E_n) \delta_\epsilon(E - E_n) \\ \sim \delta_\epsilon(E - H_o(x)) + \sum_p \frac{2^N e^{-\epsilon T_p/\hbar}}{\sqrt{\det(\mathbf{M}_p - \mathbf{I})}} \cos \left(\frac{1}{\hbar} (S_p + {}^t\mathbf{X}\mathbf{J} \frac{\mathbf{M}_p - \mathbf{I}}{\mathbf{M}_p + \mathbf{I}} \mathbf{X}) + \gamma_p \right) \delta_\epsilon(E - H_o(x)).$$

Cette formule est expliquée dans la dernière section du chapitre 4. Elle relie les fluctuations moyennes des fonctions de Wigner aux orbites périodiques classiques. On devrait aboutir aux fonctions propres individuelles (c'est-à-dire à la limite $\epsilon \rightarrow 0$) par une resommation de la divergence ; cette resommation n'a pour l'instant pu être faite que de façon approximative [4].

À la recherche de l'universalité

Face à l'impossibilité d'obtenir de façon précise le spectre exact de l'hamiltonien (ou plus généralement de l'opérateur d'évolution), on peut s'intéresser aux *corrélations* entre les énergies propres, en utilisant les outils de la physique statistique (fonctions à n points, facteurs de forme). Cette idée remonte aux années 1950 [52, 106], lors de l'étude des niveaux excités de noyaux atomiques.

La complexité de l'hamiltonien de ce type de système (à grand nombre de degrés de liberté) a conduit à une conjecture (paradoxalement) très simplificatrice : celle d'interpréter cet hamiltonien complexe comme une grosse matrice (dans une base fixée), dont les éléments seraient 'aléatoires'. On aboutit donc à un *modèle de matrice aléatoire* pour modéliser les hamiltoniens complexes (déterministes), dans le cadre duquel on peut calculer analytiquement les corrélations de valeurs propres [92] (on doit en fait utiliser plusieurs modèles, dépendant des symétries du système). Cette approche s'est révélée très satisfaisante en physique nucléaire. Trente ans plus tard, ces mêmes ensembles de matrices ont été utilisés pour modéliser les spectres de systèmes quantiques classiquement chaotiques ayant un petit nombre de degrés de liberté (par exemple, un billard de Sinai bidimensionnel, ou les applications chaotiques sur le tore) [35].

Les modèles de matrices aléatoires permettent de calculer les corrélations entre les niveaux d'énergie, sur des écarts petits devant les variations macroscopiques de $\bar{d}(E)$. Ces calculs statistiques correspondent très bien aux corrélations obtenues à partir de spectres de systèmes déterministes chaotiques (obtenus numériquement) [35]. Il existe donc une *universalité* dans les corrélations spectrales de ce type de système, ou plus exactement un ensemble fini de classes d'universalité élémentaires, dépendant des symétries globales de la dynamique (invariance par renversement du temps, spin entier ou demi-entier) ; on peut passer d'une classe à l'autre de façon continue, en variant un paramètre de brisure de symétrie [35]. Tout système chaotique (ayant certaines symétries) aura des corrélations spectrales données par l'ensemble de matrices aléatoires correspondant. De plus, les spectres de systèmes intégrables, qu'on connaît plus précisément par les règles de quantification EBK, ont des corrélations très différentes (poissonniennes) de celles des modèles de matrices : les corrélations spectrales apparaissent donc comme des *indicateurs quantiques* de la nature de la dynamique classique (intégrable ou chaotique). Signalons tout de même des contre-exemples : certaines surfaces compactes de courbure négative constante [33], et les transformations quantiques du chat (cf. section 3.3.2) ont des spectres à statistique de Poisson, bien que les dynamiques classiques présentent toutes les caractéristiques du chaos ; ces pathologies s'expliquent par l'existence de 'symétries arithmétiques' dans ces systèmes, qui rendent leur spectre très peu générique.

Cette approche statistique peut en fait être reliée partiellement aux approches semi-classiques esquissées ci-dessus. En utilisant la formule des traces (1.16), on peut retrouver (de façon non rigoureuse) le facteur de forme spectral prédit par la théorie des matrices aléatoires, qu'il faut en fait corriger pour les temps très courts par des contributions non-universelles dues aux premières orbites périodiques [21, 32]. Parallèlement, une approche de théorie des champs supersymétrique, inspirée de la physique des systèmes désordonnés [6, 134], a également permis de calculer les corrélations des spectres de systèmes classiquement chaotiques, et aboutit plus ou moins aux mêmes résultats que par la formule des traces, c'est-

à-dire à une forme universelle des corrélations dans un certain secteur en énergie (resp. en temps si on s'intéresse au facteur de forme), corrigée par des termes spécifiques au système.

Retour aux états propres

Une approche statistique a également été utilisée pour modéliser les fonctions propres de systèmes classiquement chaotiques : celles-ci ont été assimilées très tôt à des superpositions d'ondes planes de même énergie mais de directions aléatoires [20], avant même la découverte du phénomène de cicatrice. Cette vision des choses rejoint en fait les modèles de matrices aléatoires : en effet, un vecteur propre d'une matrice aléatoire est un vecteur aléatoire, ou encore, selon la représentation qu'on utilise (Schrödinger, Wigner, Bargmann), une fonction aléatoire dans un certain espace. Nous développerons dans la section 4.7.1 plusieurs modèles de vecteurs aléatoires dans le cadre de la mécanique quantique sur le tore, afin de modéliser les fonctions propres des transformations quantiques du chat ou du boulanger. Nous nous placerons de préférence en représentations de Bargmann–Husimi, et également en représentation stellaire, ce qui constitue une approche plus récente de l'étude statistique des vecteurs propres. On vérifiera en particulier que les densités semi-classiques aléatoires sont non seulement en accord avec la propriété d'équidistribution prédite par le théorème de Schnirelman, mais qu'elles décrivent cette équidistribution de manière plus précise (section 4).

En nous inspirant des études sur le spectre (cf. la discussion sur le facteur de forme), nous nous attacherons à maîtriser les fluctuations des différentes quantités dans ce type de modèle statistique, afin de pouvoir extraire des effets *dynamiques* sur les fonctions propres chaotiques : en clair, pour pouvoir identifier des effets spécifiques au système (par exemple les cicatrices) par dessus les fluctuations 'universelles' données par les modèles statistiques.

Chapitre 2

Un système intégrable sur le plan

Avant de nous plonger dans le chaos du tore, nous effectuons un petit ‘exercice asymptotique’, qui consiste à calculer la forme des fonctions propres d’un hamiltonien unidimensionnel, pour une énergie proche de celle d’une séparatrice (v. fig. 1.1), et en utilisant spécifiquement les représentations de Bargmann–Husimi et stellaire dans le plan. Le calcul des fonctions propres est fait en utilisant la *forme normale* de ce type de dynamique, c’est-à-dire l’hamiltonien purement hyperbolique $H_{\text{hyperb}} = qp$; il mène à des approximations uniformes des fonctions d’onde autour de l’énergie critique, qui vont donc au-delà des formules WKB standard. Ces méthodes asymptotiques seront décrites suffisamment en détail pour qu’on puisse mesurer par contraste l’ampleur du vide à combler dans les cas non intégrables. Tous les résultats sont extraits de [1]. Nous commençons par définir les représentations utilisées.

2.1 Fonctions de Bargmann–Husimi dans le plan

La représentation de Bargmann [15] est une représentation des fonctions d’ondes utilisant des états cohérents, qui permet d’identifier toute fonction d’onde $\psi(q) \in L^2(\mathbb{R})$ à une fonction entière $\psi(z)$ (c’est-à-dire holomorphe sur \mathbb{C} , identifié à l’espace des phases \mathbb{R}^2). Plus précisément, $\psi(z)$ est définie par la transformation intégrale :

$$\psi(z) = \langle z | \psi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(\pi \hbar)^{1/4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2 + q'^2}{2\hbar} + \sqrt{2} \frac{z q'}{\hbar}} \psi(q') dq'. \quad (2.1)$$

Cette transformation de $L^2(\mathbb{R})$ sur un espace de fonctions entières dépend de \hbar , mais en général cette dépendance sera implicite dans nos notations (par exemple dans celle de l’état cohérent $|z\rangle$). La formule ci-dessus définit à la fois la fonction de Bargmann $\psi(z)$ associée à l’état ψ et l’état cohérent $|z\rangle$ (de Weyl) localisé autour du point de l’espace des phases (q, p) donné par $z = (q - ip)/\sqrt{2}$. Cet état est construit à partir de l’état fondamental de l’oscillateur harmonique $|0\rangle$, par

action d'un opérateur de translation dans l'espace des phases [132, 77, 104] :

$$|z\rangle = e^{\frac{\bar{z}a^\dagger}{\hbar}} |0\rangle = e^{\frac{z\bar{z}}{2\hbar}} U(q, p)|0\rangle, \quad (2.2)$$

où on a noté $a^\dagger = (\hat{q} - i\hat{p})/\sqrt{2}$ l'opérateur de création et $U(q, p) \stackrel{\text{def}}{=} e^{i(p\hat{q} - q\hat{p})/\hbar}$ l'opérateur unitaire de translation dans l'espace de phases. La formule ci-dessus a plusieurs conséquences [77] : $|z\rangle$ est un état propre de l'opérateur d'annihilation a , de valeur propre \bar{z} . D'autre part, $|z\rangle$ dépend de la variable z de façon *anti-holomorphe* (de manière à ce que $\psi(z)$ en dépende de façon holomorphe). Cette propriété l'empêche d'être normalisé : on a en fait $\langle z|z'\rangle = e^{z\bar{z}'/\hbar}$. Enfin, la famille des états cohérents $\{|z\rangle, z \in \mathbb{C}\}$ forme une famille surcomplète dans $L^2(\mathbb{R})$, puisqu'on a la formule de fermeture suivante :

$$\mathbb{I} = \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2z}{\pi\hbar} e^{-z\bar{z}/\hbar} |z\rangle\langle z|. \quad (2.3)$$

(dans toute la suite, la mesure usuelle sur \mathbb{C} sera notée $d^2z \stackrel{\text{def}}{=} d\Re(z)d\Im(z)$). Cette formule permet de reconstruire la fonction d'onde en représentation de Schrödinger à partir de sa fonction de Bargmann, par insertion de cette identité entre $\langle q|$ et $|\psi\rangle$. Elle établit en fait une isométrie [15] entre les espaces de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ et \mathcal{F}_\hbar , l'espace des fonctions entières $\psi(z)$ vérifiant $\int_{\mathbb{C}} d^2z |\psi(z)|^2 e^{-z\bar{z}/\hbar} < \infty$, muni du produit scalaire :

$$\langle \psi|\phi\rangle = \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2z}{\pi\hbar} e^{-z\bar{z}/\hbar} \bar{\psi}(z) \phi(z). \quad (2.4)$$

La propriété ci-dessus vérifiée par les fonctions de \mathcal{F}_\hbar a des conséquences sur leur croissance à l'infini : en utilisant la relation de Cauchy-Schwarz, on obtient l'inégalité [15] :

$$|\psi(z)| \leq \|\psi\| e^{\frac{|z|^2}{2\hbar}}, \quad (2.5)$$

ce qui montre que $\psi(z)$ est une fonction d'ordre ≤ 2 et de type fini $\leq 1/2\hbar$ [34]. Par conséquent, la distribution des zéros de $\psi(z)$ (qui sont des points isolés de \mathbb{C}) est également contrainte : la fonction de comptage

$$n(r) \stackrel{\text{def}}{=} \#\{\text{zéros } z_j \text{ de } \psi(z) \text{ tels que } |z_j| \leq r\} \quad (2.6)$$

(les zéros sont toujours comptés avec leur multiplicité) est bornée par :

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^2} \leq \frac{e}{\hbar}. \quad (2.7)$$

Cette propriété permet de décomposer $f(z)$ en un produit de Hadamard [34] du type :

$$\psi(z) = e^{(a_0 + a_1 z + a_2 z^2)/\hbar} z^{n(0)} \prod_{z_l \neq 0} \left(1 - \frac{z}{z_l}\right) \exp\left(\frac{z}{z_l} + \frac{z^2}{2z_l^2}\right). \quad (2.8)$$

Le produit ci-dessus converge forcément, du fait de la contrainte (2.7). Le coefficient quadratique a_2 est borné par $a_2 \leq 1/2$ pour que la borne de croissance (2.5) soit satisfaite. a_0 correspond à un facteur de normalisation.

Cette formule de factorisation signifie que la fonction de Bargmann $\psi(z)$ d'un état ψ est totalement déterminée par la connaissance des coefficients a_0, a_1, a_2 et des zéros $\{z_l\}$. On a donc la possibilité de coder entièrement l'information sur l'état ψ dans ces données : on obtient la *représentation stellaire* de $L^2(\mathbb{R})$ [86]. Cette représentation est multiplicative, donc hautement non-linéaire ; étant constituée d'un ensemble de points dans l'espace des phases, elle est susceptible de se prêter à une analyse semi-classique. A l'heure actuelle, une telle analyse est à l'état embryonnaire, une partie de cette thèse est en fait consacrée à son développement, essentiellement dans le cas où les fonctions de Bargmann représentent des états propres de systèmes classiquement chaotiques (section 4) [86, 128, 10].

Nous introduisons deux types de densités semi-classiques associées à un état quantique $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, respectivement sa fonction de Wigner [12] et de Husimi [71] : ces deux fonctions représentent ψ sous la forme de 'densités de probabilité' sur l'espace des phases \mathbb{R}^2 .

2.1.1 Fonctions de Wigner et de Husimi

Nous commençons par la définition de la fonction de Wigner $W_\psi(q, p)$ associée à un état normalisé $\psi \in L^2(\mathbb{R})$:

$$W_\psi(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \psi(q - r/2) \bar{\psi}(q + r/2) e^{\frac{ipr}{\hbar}} dr. \quad (2.9)$$

On vérifie aisément que cette fonction est réelle, que $\int_{\mathbb{R}} W_\psi(q, p) dp = |\psi(q)|^2$, donc que son intégrale totale sur \mathbb{R}^2 vaut 1. Algébriquement, on peut définir la transformée de Wigner d'un opérateur \hat{A} par une formule analogue (ci-dessus, \hat{A} correspond au projecteur orthogonal sur ψ). Cette transformation est alors l'inverse de la quantification symétrique (dite de Weyl), qui à une fonction :

$$\begin{aligned} f(q, p) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(vq-up)/\hbar} \tilde{f}(u, v) du dv \\ \text{associe l'opérateur } Op^W(f) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} U(u, v) \tilde{f}(u, v) du dv \end{aligned} \quad (2.10)$$

(où on a utilisé les opérateurs de translation définis plus haut). La fonction de Wigner est réelle, mais peut prendre des valeurs négatives. Elle est en revanche invariante par transformation symplectique linéaire des coordonnées (q, p) .

Nous présentons ensuite la densité de Husimi, qui dérive de la précédente par un lissage gaussien approprié :

$$H_\psi(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} W_\psi(q', p') e^{-[(q-q')^2 + (p-p')^2]/\hbar} dq' dp'. \quad (2.11)$$

Comme la gaussienne n'est pas invariante par transformation symplectique (mais seulement par rotation), la fonction de Husimi est moins symétrique que celle de Wigner ; elle est également normalisée sur \mathbb{R}^2 . Le lissage permet de tuer les oscillations de la fonction de Wigner, et il rend en fait la fonction de Husimi *positive ou nulle* sur \mathbb{R}^2 . Celle-ci peut en effet être définie alternativement à partir de la fonction de Bargmann $\psi(z)$:

$$H_\psi(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} |\psi(z)|^2 e^{-z\bar{z}/\hbar} = \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{\langle \psi|z \rangle \langle z|\psi \rangle}{\langle z|z \rangle} \quad \text{avec } z = \frac{q - ip}{\sqrt{2}}. \quad (2.12)$$

(Cette normalisation de H_ψ est différente de celle utilisée dans [1], afin d'en faire une densité de probabilité sur $(\mathbb{R}^2, dqdp)$). Cette équation décrit en fait $H_\psi(q, p)$ de façon plus parlante que (2.11), et c'est sur celle-ci que nous nous appuyons dans la suite. Elle permet de caractériser analytiquement les densités de Husimi parmi l'espace énorme des mesures de probabilité sur \mathbb{R}^2 , la caractérisation d'une fonction de Wigner étant plus problématique. De plus, elle montre que les zéros de $\psi(z)$, qui contiennent presque toute l'information, sont également les zéros de H_ψ . Par conséquent, on peut aisément reconstruire l'état ψ (à une phase près) à partir de la densité de Husimi, donc retrouver la phase de $\psi(z)$ à partir de son seul module.

Comme la fonction de Wigner, la densité de Husimi peut se généraliser aux observables quantiques. Inversement, les états cohérents permettent de définir une quantification des fonctions sur l'espace des phases, dite quantification Anti-Wick [104, 69], qui est différente de celle de Weyl mais débouche également sur des opérateurs auto-adjoints pour une fonction classique réelle :

$$Op^{AW}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 z}{\pi\hbar} |z\rangle f(z, \bar{z}) \langle z| e^{-\frac{z\bar{z}}{\hbar}}. \quad (2.13)$$

Cette quantification est un cas particulier des quantifications dites de Töplitz [131]. Elle a l'avantage d'associer à une fonction positive un opérateur auto-adjoint positif. De plus, l'opérateur $Op^{AW}(f)$ s'exprime aisément comme un opérateur différentiel agissant sur la fonction de Bargmann. En effet, il suffit d'utiliser les correspondances

$$\begin{aligned} z &\longrightarrow \text{multiplication par } z \\ \bar{z} &\longrightarrow \hbar \frac{d}{dz}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

et d'ordonner les \bar{z} à *gauche* des z dans la série de Taylor de $f(z, \bar{z})$ (d'où l'appellation 'anti-Wick'). Ce formalisme permet en particulier de représenter la mesure de Husimi H_ψ comme un 'élément de matrice' :

$$\int_{\mathbb{R}^2} dq dp f(q, p) H_\psi(q, p) = \langle \psi | Op^{AW}(f) | \psi \rangle. \quad (2.15)$$

C'est en se servant de cette interprétation algébrique des densités de Husimi (ou de l'identité équivalente relative aux fonctions de Wigner) qu'on peut montrer la propriété de Schnirelman, c'est-à-dire l'équidistribution semi-classique de la densité dans le cas de systèmes classiquement ergodiques (section 4.3).

Extension multidimensionnelle

La transformation de Bargmann se généralise sans problème à $L^2(\mathbb{R}^d)$ pour toute dimension d (ainsi que la transformée de Husimi, définie plus bas). Néanmoins, on obtient alors des espaces de fonctions entières à plusieurs variables complexes $z_{(1)}, \dots, z_{(d)}$, dont l'analyse est plus compliquée qu'en une dimension. En particulier, l'ensemble des zéros d'une telle fonction n'est pas discret, mais constitue une union de sous-variétés ayant des points singuliers, appelées *données de Cousin* [88, chap. 3]. La décomposition de la fonction de Husimi en termes de ces données est toujours faisable, mais ces dernières sont moins faciles à analyser qu'un ensemble de points discrets dans le plan. Une autre possibilité pour étudier un problème multi-dimensionnel (par exemple pour $d = 2$) consiste à décomposer la fonction de Bargmann en une somme de termes homogènes par rapport à l'une des variables :

$$\psi(z_{(1)}, z_{(2)}) = \sum_{n \geq 0} z_{(1)}^n \psi_n(z_{(2)}),$$

et à analyser séparément les constellations des fonctions $\psi_n(z_{(2)})$ [40].

2.1.2 Autres géométries

Plus généralement, il est possible de définir les représentations de Bargmann–Husimi sur un espace des phases de géométrie quelconque, du moment que cet espace possède une structure complexe, et qu'on sait y construire une famille d'états cohérents dépendant analytiquement de la position (la définition de la fonction de Wigner nécessite l'existence d'une transformée de Fourier sur l'espace des phases). Dans le cas bidimensionnel (la position est donnée dans chaque carte par un seul paramètre complexe z), on a alors une représentation stellaire analogue à celle du plan. Nous nous restreignons à ce cas-là dans la suite.

Dans la section 3.1, nous présentons en détail les représentations de Bargmann–Husimi, ainsi que la représentation stellaire, lorsque l'espace des phases est le tore bidimensionnel \mathbb{T}^2 , sur lequel on étudiera les applications quantiques du chat et du boulanger.

Il est également possible de définir naturellement ces représentations sur la sphère \mathbb{S}^2 (également un espace des phases compact bidimensionnel), qu'on munit d'une structure complexe par projection stéréographique sur $\mathbb{C} \cup \infty$ [91, 104]. On obtient alors comme fonctions de Bargmann des polynômes en la variable z , de degré $\sim 1/\hbar$; par conséquent, la représentation stellaire est plus simple que dans le plan, puisque le produit de Hadamard est fini. Nous décrivons un

peu plus en détail cette représentation pour les états de spin sur la sphère car le théorème d'équidistribution des constellations chaotiques s'y applique également. Nous reprenons les définitions de [86] : en décomposant un vecteur de spin S (c'est-à-dire tel que $\vec{S}^2|\psi\rangle = \hbar^2 S(S+1)|\psi\rangle$) dans la base $\{|S, j\rangle, j = -S, \dots, S\}$ des états propres de S_3 :

$$|\psi\rangle = \sum_{j=-S}^S a_j |S, j\rangle, \quad (2.16)$$

sa fonction de Bargmann est le polynôme

$$\psi(z) = \sum_{j=-S}^S \sqrt{C_{2S}^{S-m}} a_j z^{S+j} \quad (2.17)$$

$$= a_S \prod_{l=1}^{2S} (z - z_l) \quad (2.18)$$

(C_{2S}^j est le symbole binomial). Le produit scalaire induit dans cette représentation s'écrit alors

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 z}{\pi(1+|z|^2)^2} \frac{(2S+1) \overline{\psi(z)} \phi(z)}{(1+|z|^2)^{2S}}. \quad (2.19)$$

Dans l'équation ci-dessus, on a volontairement séparé l'aire normalisée sur la sphère $\frac{d^2 z}{\pi(1+|z|^2)^2}$ du reste de l'intégrand. Celui-ci définit (en prenant $\phi = \psi$) la fonction de Husimi associée à ψ : on obtient donc une densité de probabilité sur \mathbb{S}^2 , invariante par rapport à l'action du groupe des rotations.

La transformation de Bargmann peut être définie naturellement dans le disque de Poincaré $\mathbb{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{|z| < 1\}$ [104, chap. 5], autrement dit dans le demi-plan supérieur $\{\Im \xi > 0\}$; elle permet par exemple de décrire la dynamique radiale d'un système invariant par rotation [102]. Cependant, les familles de fonctions holomorphes sur le disque qu'on obtient sont moins faciles à caractériser en termes de leurs zéros que dans le plan [104, §14.3] [117]. Les états cohérents obtenus sur le disque (aussi appelé la pseudosphère) sont engendrés par les représentations discrètes de $\text{SU}(1,1)$, similaires aux représentations de $\text{SU}(2)$: ces représentations sont également indexées par un demi-entier $k = 1, 3/2, 2, \dots$, mais elles sont de dimension infinie [104]. Les fonctions de Bargmann sont alors des fonctions analytiques $\psi(z) = \langle k, z | \psi \rangle$ sur \mathbb{D} ; la norme de l'état cohérent $|k, z\rangle$ valant $(1 - |z|^2)^{-2k}$, on définit la fonction de Husimi de ψ par $H_\psi(z, \bar{z}) = (2k-1) |\psi(z)|^2 (1 - |z|^2)^{2k}$. Le produit scalaire de deux états dans la représentation d'ordre k s'écrit, en représentation de Bargmann :

$$\langle \phi | \psi \rangle = \frac{2k-1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{d^2 z}{(1-|z|^2)^2} \overline{\psi(z)} \phi(z) (1-|z|^2)^{2k}. \quad (2.20)$$

À partir de la pseudosphère, on construit naturellement une surface de Riemann compacte X_g de genre $g \geq 2$, en quotientant \mathbb{D} par un sous-groupe fuchsien

Γ de $SU(1,1)$. En périodisant la construction faite sur \mathbb{D} , on sait alors définir des fonctions de Bargmann sur X_g , ainsi qu’une quantification anti-Wick des observables sur cette surface [78]. Ceci définit naturellement une mécanique quantique sur X_g vue comme *espace des phases* (contrairement à leur utilisation habituelle en chaos quantique comme espaces de configuration à flot géodésique hyperbolique). Les fonctions de Bargmann sur X_g seront des formes automorphes de Γ , c’est-à-dire des fonctions analytiques sur \mathbb{D} ayant les propriétés de pseudo-périodicité :

$$\forall \gamma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in \Gamma, \quad \forall z \in \mathbb{D}, \quad \psi_k \left(\frac{\alpha z + \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}} \right) = v(\gamma)(\beta z + \bar{\alpha})^{2k} \psi_k(z). \quad (2.21)$$

Le facteur $v(\gamma)$ est un caractère multiplicatif unitaire de Γ (c’est-à-dire $v(\gamma_1 \gamma_2) = v(\gamma_1)v(\gamma_2)$, et $|v(\gamma)| = 1$). Une telle forme automorphe est dite de poids k , associée à v . Cette équation est le pendant de (3.11) pour les surfaces de genre ≥ 2 . On peut généraliser cette construction pour des valeurs de k fractionnaires, du type $k = n/(2g - 2)$; $v(\gamma)$ n’est alors plus un caractère de Γ , mais un *multiplicateur*, défini pour que les relations de quasi-périodicité ci-dessus soient cohérentes avec le choix de phase pour $(\beta z + \bar{\alpha})^{2k}$ [78, 105]. Dans tous les cas, la fonction de Husimi peut alors être définie comme sur le disque \mathbb{D} :

$$H_{\psi_k}(z, \bar{z}) = (2k - 1) |\psi_k(z)|^2 (1 - |z|^2)^{2k}. \quad (2.22)$$

(le facteur de normalisation $(2k - 1)$ n’a de sens que pour les valeurs de k correspondant à des représentations de $SU(1,1)$, c’est-à-dire $k = 1, 3/2, 2, \dots$). Cette fonction est périodique par rapport à Γ , donc c’est bien une densité sur X_g . Elle sera normalisée à l’unité en utilisant le même produit scalaire que (2.20), mais en intégrant uniquement sur un domaine fondamental de X_g (cf. le passage de (2.4) dans le plan à (3.20) sur le tore). Enfin, signalons que cette fonction $\psi_k(z)$ a exactement $2k(g - 1)$ zéros dans le domaine fondamental [104]. La dimension de ces espaces de Hilbert dépend du genre g , du poids k et du caractère $v(\gamma)$: par exemple, pour $k = 1$, la dimension sera g si le caractère est trivial ($v \equiv 1$), $g - 1$ sinon [56]. En choisissant $k = (2g - 2)^{-1}$, on obtient des fonctions ψ n’ayant qu’un zéro sur X_g , dont la position dépend du multiplicateur $v(\gamma)$ (cf la situation sur le tore pour $N = 1$). En utilisant ces fonctions, on peut alors factoriser toute fonction $\psi_k(z)$, de façon unique à une constante près : on a donc une représentation stellaire des états quantiques, comme sur la sphère ou le tore.

Cette mécanique quantique sur X_g ne présente pour l’instant qu’un intérêt anecdotique, au moins dans le domaine du chaos quantique, puisqu’on ne connaît pas de dynamique classique chaotique définie sur ce type de surface. Nous avons un peu détaillé la quantification sur ces surfaces pour pouvoir énoncer le théorème d’équidistribution des constellations en toute généralité (section 4.6).

2.1.3 Propriétés semi-classiques des fonctions de Wigner et Husimi

Ces deux types de mesures microlocales ont été introduites pour tenter de retrouver des traces de dynamique classique au niveau quantique, c'est-à-dire sur les fonctions propres.

Pour un système intégrable, la fonction de Wigner associée à un état propre d'énergie régulière E se concentre sur le tore invariant associé à cet état, et présente des oscillations dans la portion de l'espace des phases accessible classiquement, tandis qu'elle décroît exponentiellement à l'extérieur [20]. Le lissage menant à la densité de Husimi permet de tuer ces oscillations dues aux interférences quantiques : H_ψ se concentre sur le tore invariant et décroît exponentiellement dès qu'on s'en éloigne [123]. Dans la section suivante, nous obtiendrons cette concentration dans le cas de l'hamiltonien intégrable H_{hyperb} : à une dimension, un 'tore invariant' est simplement une courbe d'énergie Σ_E (v. éq. (2.36)). Pour cette raison, H_ψ est plus proche que W_ψ d'une densité classiquement invariante (sans compter qu'elle est positive, contrairement à W_ψ).

Dans le cas d'états propres chaotiques, la seule information semi-classique est donnée par le théorème de Schnirelman (v. section 4.3) : à la limite $\hbar \rightarrow 0$, les fonctions de Wigner (resp. de Husimi) convergent au sens des distributions (resp. au sens de la mesure) vers la mesure invariante sur la surface d'énergie, $\delta(E - H(q, p))$ [20]. Nous tâcherons de préciser un peu de quelle manière les densités de Husimi se rapprochent de cette limite classique (chapitre 4). Nous y étudierons également les propriétés semi-classiques de la représentation stellaire.

2.2 Point fixe hyperbolique

Avant de nous consacrer à des systèmes chaotiques sur le tore, nous allons nous intéresser à des systèmes hamiltoniens unidimensionnels indépendants du temps (donc intégrables) dans le plan. On va étudier en priorité les états propres dont la surface d'énergie classique est une *séparatrice* (cf section 1.1), pour lesquels les approximations WKB standard ne fonctionnent pas. Afin de pallier ce manque, notre méthode consiste à substituer à l'hamiltonien sa *forme normale* autour de la séparatrice, c'est-à-dire l'hamiltonien purement hyperbolique $H_{\text{hyperb}}(q, p) = qp$ (dans les variables convenables). Par une rotation de $\pi/4$ de ces variables

$$q = \frac{Q + P}{\sqrt{2}}, \quad p = \frac{P - Q}{\sqrt{2}}, \quad (2.23)$$

celui-ci se ramène à une barrière quadratique $H_{\text{hyperb}}(Q, P) = P^2/2 - Q^2/2$, qui bien entendu, une fois quantifiée, n'a pas d'états propres liés, mais uniquement des états de diffusion non normalisables, et dont le spectre est \mathbb{R} tout entier. Nous

utiliserons la quantification de Weyl, ce qui correspond à

$$\hat{H}_{\text{hyperb}} = \frac{\hbar}{i} \left(q \frac{d}{dq} + 1/2 \right) = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2}{dQ^2} - \frac{Q^2}{2}. \quad (2.24)$$

Notons que l'hamiltonien de départ peut, lui, posséder des états liés, et donc un spectre discret $\{E_j, j \in \mathbb{N}\}$; par exemple, il suffit d'ajouter un terme quartique à H_{hyperb} pour obtenir l'hamiltonien de double puits $H_{\text{d.p.}}(Q, P) = H_{\text{hyperb}}(Q, P) + \mu Q^4$ (v. fig. 1.1). Bien que $\hat{H}_{\text{d.p.}}$ et \hat{H}_{hyperb} soient de natures spectrales totalement différentes, ils sont équivalents (au sens de leur développement limité au voisinage de l'origine $(Q, P) = (0, 0)$); par conséquent, une fonction propre d'énergie E_j de $\hat{H}_{\text{d.p.}}$ doit 'ressembler' à une certaine fonction propre de \hat{H}_{hyperb} de même énergie. Cette ressemblance a un sens dans l'espace des phases, au voisinage de l'origine (on dit que les deux fonctions sont proches *microlocalement*): pour pouvoir comparer correctement les deux états, il faut donc les représenter par leurs densités semi-classiques (v. figure 2.3). Nous avons opté pour la représentation de Bargmann–Husimi qui nous semble mieux rendre compte de la limite classique que celle de Wigner, et également dans le but de tester la représentation stellaire dans un cas où l'espace des phases est non compact (contrairement au chapitre suivant). Nous ne détaillerons pas plus les arguments expliquant la ressemblance microlocale entre les fonctions propres de $\hat{H}_{\text{d.p.}}$ et \hat{H}_{hyperb} (on donnera un exemple numérique en conclusion) [43]. On se contentera plutôt de décrire en détail celles auxquelles on a accès analytiquement, c'est-à-dire les secondes.

La stratégie décrite ci-dessus pour trouver une approximation des états propres de $\hat{H}_{\text{d.p.}}$ près de l'énergie de la séparatrice est en fait un cas particulier des méthodes d'*approximation uniforme* des solutions d'une équation différentielle, qu'on doit mettre en œuvre dès que la méthode WKB standard diverge (par exemple, on doit utiliser une fonction d'Airy pour modéliser une fonction propre de l'équation de Schrödinger autour d'un point tournant [25]).

2.2.1 \hat{H}_{hyperb} en représentation de Bargmann

La représentation de Bargmann a été au départ introduite pour décrire les états liés, c'est-à-dire des fonctions d'onde dans $L^2(\mathbb{R})$. Or, les fonctions propres de $\hat{H}_{\text{hyperb}} = \frac{\hbar}{i} \left(q \frac{d}{dq} + 1/2 \right)$ ne sont pas de carré intégrable : pour toute énergie $E \in \mathbb{R}$, il existe deux fonctions propres indépendantes de \hat{H}_{hyperb} , données par

$$\psi_{\pm}^E(q) = K \Theta(\pm q) e^{i(E/\hbar - 1/2) \log |q|}, \quad (2.25)$$

où $\Theta(q)$ est la fonction de Heavyside, K une constante non nulle quelconque. La solution générale pour cette énergie sera notée

$$\psi_{\lambda}^E = \psi_{+}^E + \lambda \psi_{-}^E, \quad \text{pour } \lambda \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty. \quad (2.26)$$

Ces fonctions peuvent être considérées comme des distributions tempérées sur \mathbb{R} , auxquelles on peut facilement étendre la représentation de Bargmann [16]. En effet, l'intégrale (2.1) définissant $\langle z|\psi\rangle$ a toujours un sens si $\psi(q)$ est une distribution, puisque le noyau $\langle z|q\rangle$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. La fonction $\psi(z)$ obtenue sera toujours entière, et d'ordre 2 : en fait, dans le cas présent, on a une majoration sur $\psi(z)$ similaire à celle d'une fonction normalisée (2.5) :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |\psi_\lambda^E(z)| \leq C_\lambda e^{\frac{|z|^2}{2\hbar}}. \quad (2.27)$$

Pour cette raison, les zéros de $\psi_\lambda^E(z)$ sont soumis à la même contrainte (2.7) que pour une fonction de carré intégrable. Par conséquent, les fonctions $\psi_\lambda^E(z)$ peuvent se décomposer en un produit de Hadamard du type (2.8).

Les fonctions de Bargmann $\psi_\lambda^E(z)$ peuvent être obtenues de deux manières : soit en calculant la transformée de Bargmann de $\psi_\pm^E(q)$, soit en remarquant que \hat{H}_{hyperb} est réalisé en représentation de Bargmann comme l'opérateur différentiel suivant (en utilisant les éqs.(2.14) :

$$\left[\hat{H}_{\text{hyperb}} \psi \right] (z) = \frac{i}{2} \left(-\hbar^2 \frac{d^2}{dz^2} + z^2 \right) \psi(z). \quad (2.28)$$

On obtient donc une équation similaire à l'équation de Schrödinger de la barrière quadratique (2.24), si ce n'est que les solutions $\psi^E(z)$ sont étendues à tout le plan complexe (en utilisant la variable $Z = z e^{-i\pi/4}$, on retrouve exactement l'équation (2.24) dans la variable Q). Les solutions de cette équation sont données en termes de fonctions spéciales $D_\nu(y)$ appelées fonctions cylindro-paraboliques [17, vol. 2, chap. 8] :

$$\psi_\pm^E(z) = K \frac{\hbar^{\frac{iE}{2\hbar}}}{\pi^{1/4}} \Gamma(1/2 + iE/\hbar) D_{-1/2 - iE/\hbar}(\mp z \sqrt{2/\hbar}). \quad (2.29)$$

Notre objectif consiste donc à décrire dans tout le plan complexe les fonctions $\lambda D_\nu(y) + D_{-\nu}(y)$, pour $\nu = -1/2 - iE/\hbar$. Par symétrie, on peut se restreindre au cas $E \geq 0$; on pourrait également poser $\hbar = 1$, quitte à renormaliser l'énergie et la variable z , mais on ne le fera pas, afin d'obtenir de réelles approximations semi-classiques pour les fonctions de Bargmann $\psi_\lambda^E(z)$, ainsi que pour les fonctions de Husimi correspondantes, notées $H_\lambda^E(z, \bar{z})$.

Les fonctions cylindro-paraboliques étant ce qu'elles sont, on ne peut les décrire simplement que dans certaines limites, ou pour des valeurs particulières des variables y et ν . Remarquons déjà que pour une valeur nulle de l'énergie, ces fonctions se réduisent à des fonctions de Bessel :

$$\pm D_{-1/2}(y) + D_{-1/2}(-y) = e^{\pm i\pi/8} (\pi y)^{1/2} J_{\mp 1/4}(iy^2/4). \quad (2.30)$$

On se servira ainsi de la connaissance qu'on a des zéros des $J_{\mp 1/4}$ pour analyser ceux des fonctions D_ν plus générales.

2.2.2 Développements asymptotiques

Les résultats asymptotiques se répartissent en deux classes. Une première possibilité consiste à étudier les fonctions ψ^E en fixant l'énergie, puis en prenant la limite $\hbar \rightarrow 0$. Si $E = 0$, on se ramène donc à l'étude des fonctions de Bessel décrites ci-dessus ; si $E \neq 0$, cela signifie qu'on se place sur une courbe Σ_E d'énergie régulière (pour l'hamiltonien $H_{d.p.}$, ces courbes d'énergie ont la topologie d'un cercle, cf. fig. 1.1). On peut donc utiliser la méthode WKB standard, directement en représentation de Bargmann [125]. Étant donné la simplicité de l'hamiltonien, on obtient des formules asymptotiques assez explicites, que nous donnons dans la variable Z .

Méthode WKB en représentation de Bargmann

Nous choisissons une énergie $E > 0$. On utilisera la partition du plan complexe donnée dans la figure 2.1. Il faut tout d'abord calculer la solution $\phi(Z)$ de l'équation de Hamilton–Jacobi $H_{\text{hyperb}}(Z, \frac{\partial \phi}{\partial Z}) = E$. Elle est donnée par les intégrales :

$$\begin{aligned} \phi(Z_0, Z) &= \int_{Z_0}^Z \sqrt{2E + Z'^2} \\ &= \frac{1}{2} \left[Z' \sqrt{2E + Z'^2} + \log(Z' + \sqrt{2E + Z'^2}) \right]_{Z_0}^Z, \end{aligned} \quad (2.31)$$

où Z_0 est une origine qu'on ajustera selon les cas. L'intégrale ci-dessus dépend du chemin qu'on emprunte autour des *points tournants* $Z_{\pm} = \pm i\sqrt{2E}$, ou de façon équivalente, de la détermination de la racine carrée (on choisit en pratique de définir celle-ci par les coupures indiquées sur la figure 2.1 et une valeur positive en l'origine). Ces deux points seront singuliers vis-à-vis des approximations qui suivent.

La théorie WKB dans \mathbb{C} [99] nous prescrit alors la forme asymptotique des fonctions $\psi^E(Z)$ en divisant le plan complexe en secteurs \mathcal{S}_j , séparés par des lignes émanant justement des points tournants (dites lignes de Stokes, v. fig. 2.1). Dans chaque secteur, et loin des points tournants, la solution générale de l'équation de Schrödinger à l'énergie E aura la forme asymptotique :

$$\psi^E(Z) \sim \frac{1}{(2E + Z^2)^{1/4}} \left\{ \alpha_j(\hbar) e^{i\phi(Z_0, Z)/\hbar} + \beta_j(\hbar) e^{-i\phi(Z_0, Z)/\hbar} \right\}, \quad (2.32)$$

où les coefficients α_j, β_j dépendent du secteur dans lequel on se trouve (la détermination de la phase du préfacteur est fixée par les mêmes coupures que la racine carrée). Lorsqu'on traverse une ligne de Stokes, ces coefficients sont modifiés de façon discontinue, les relations entre coefficients de deux secteurs adjacents étant appelées *règles de connexion*. Comme on va le voir, cette discontinuité n'est pas contradictoire avec le caractère parfaitement holomorphe de

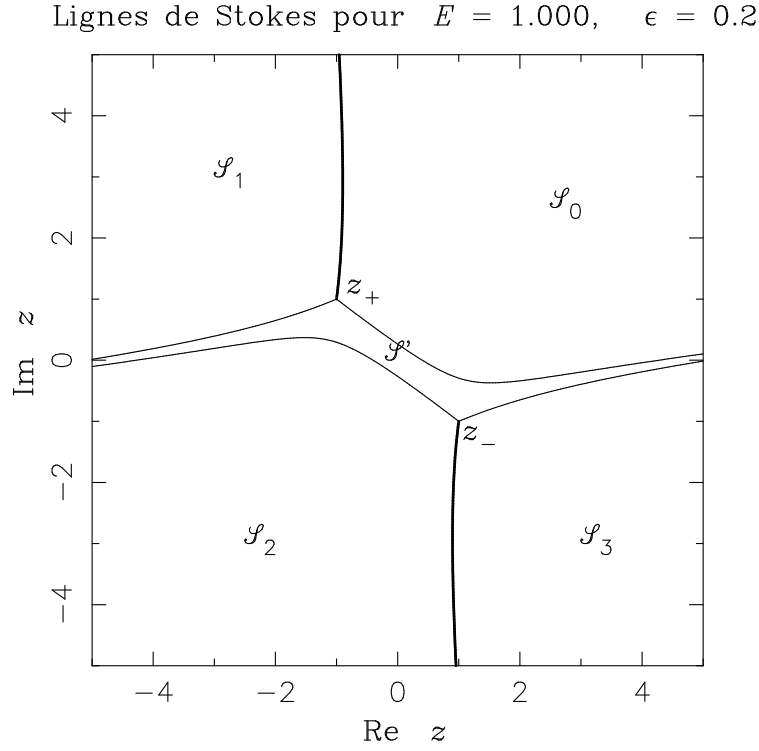


FIG. 2.1 – Partition du plan complexe en secteurs délimités par des lignes de Stokes. Celles-ci sont issues des points tournants Z_{\pm} . Afin d'éviter une ligne de Stokes singulière reliant Z_+ à Z_- , on a dû faire légèrement tourner \hbar dans le plan complexe : $\hbar = e^{i\epsilon} |\hbar|$. Les lignes en gras indiquent le choix des coupures pour les fonctions multivaluées.

$\psi^E(Z)$: en effet, elle consiste à ajouter un terme exponentiellement petit le long de la ligne.

Règles de connexion

Il suffit en fait d'établir ces règles de connexion pour la solution particulière $\psi_+^E(Z) = \psi_-^E(-Z)$, les règles pour une solution $\psi_\lambda^E(Z)$ s'en déduisant par linéarité.

En analysant l'intégrale (2.1) définissant $\psi_+^E(z)$, on remarque que cette fonction décroît exponentiellement lorsque $\Re(z) \rightarrow -\infty$. Étant donné notre choix de détermination des racines carrées, cela signifie que le coefficient β doit s'annuler dans les secteurs correspondants (\mathcal{S}_1 , \mathcal{S}' , \mathcal{S}_2).

Ensuite, pour passer d'un secteur \mathcal{S}_j à un secteur adjacent $\mathcal{S}_{j'}$, séparés par une ligne de Stokes qui émane du point tournant $Z_{jj'}$, il est commode d'écrire les solutions WKB (2.32) en prenant comme action $\phi(Z_{jj'}, Z)$: au voisinage de $Z_{jj'}$, celle-ci se comporte comme $C_{jj'}(Z - Z_{jj'})^{3/2}$. Chaque ligne de Stokes partant de $Z_{jj'}$ est définie par la condition $i\phi(Z_{jj'}, Z)/\hbar \in \mathbb{R}$, donc il y en a 3 autour de chaque point tournant, formant les angles séparés de $2\pi/3$ (cf. fig. 2.1).

Quelle sont les règles de connexion si on veut passer de \mathcal{S}_j à $\mathcal{S}_{j'}$ par une rotation dans le sens trigonométrique (par exemple, de \mathcal{S}_2 à \mathcal{S}_3 sur la figure 2.1)? Supposons qu'on ait $i\phi(Z_{jj'}, Z) > 0$ le long de la ligne de Stokes jj' ; le terme exponentiel $e^{i\phi(Z_{jj'}, Z)/\hbar}$ est alors dominant. Au passage de la ligne, les modifications à faire sont les suivantes :

$$\begin{aligned} e^{i\phi(Z_{jj'}, Z)/\hbar} &\longrightarrow e^{i\phi(Z_{jj'}, Z)/\hbar} + i e^{-i\phi(Z_{jj'}, Z)/\hbar} \\ e^{-i\phi(Z_{jj'}, Z)/\hbar} &\longrightarrow e^{-i\phi(Z_{jj'}, Z)/\hbar} . \end{aligned} \quad (2.33)$$

Il est clair que les expressions des deux côtés de la ligne de Stokes sont équivalentes lorsque $\hbar \rightarrow 0$, puisque le coefficient devant le terme dominant est inchangé. Si on traverse une ligne de Stokes dans le sens des aiguilles d'une montre, le facteur i doit être remplacé par un $-i$.

En appliquant les formules de connexion ci-dessus, on peut donc prolonger le développement asymptotique à tous les secteurs \mathcal{S}_j , donc à tout le plan complexe (moins les voisinages des points tournants : les développements WKB ont un sens tant que $\phi(Z_{\pm}, Z) \gg \hbar$). Les formules sont données dans [1, §4.2]

Approximation uniforme

Le paragraphe qui précède est standard puisqu'il concerne des états d'énergie régulière. Si on veut des informations sur les états propres d'énergies proches de 0, il faut procéder autrement : les deux points tournants $Z_{\pm} = \pm i\sqrt{2E}$ vont en effet confluer vers l'origine, ce qui pose des problèmes pour les développements WKB ci-dessus. Pour contourner le problème, on va utiliser la relation (2.29) entre ψ_{λ}^E et la fonction cylindro-paraboliques $D_{-1/2-iE/\hbar}(y)$, et étudier celle-ci en *fixant* le paramètre $\nu = -1/2 - iE/\hbar$. Semi-classiquement, cela revient à considérer les fonctions propres de \hat{H}_{hyperb} d'énergies $O(\hbar)$. Pour un hamiltonien du type $\hat{H}_{\text{d.p.}}$ à spectre discret, une fenêtre en énergie de cette taille autour de $E = 0$ contient approximativement $O(|\log \hbar|)$ valeurs propres E_j [43], donc l'étude qui suit a un sens, puisqu'elle permettra de décrire un grand nombre d'états propres de $\hat{H}_{\text{d.p.}}$ (rappelons qu'une fenêtre de taille $O(\hbar)$ autour d'une énergie E régulière ne contiendra asymptotiquement qu'un nombre fini de E_j).

On connaît les développements asymptotiques de $D_{\nu}(\pm y)$ lorsque $|y| \rightarrow \infty$ [17] : comme pour la méthode WKB standard, il faut diviser \mathbb{C} en secteurs, qui sont maintenant les quatre quadrants \mathcal{S}_j (qui peuvent être vus comme les limites des \mathcal{S}_j , $j = 0, \dots, 3$, lorsque $E \rightarrow 0$). Dans chaque secteur, le développement en $|z|/\sqrt{\hbar} \rightarrow \infty$ est de la forme (à l'ordre dominant en \hbar) :

$$\psi^E(z) \sim \alpha_j(\hbar) z^{-1/2-iE/\hbar} e^{-z^2/2\hbar} + \beta_j(\hbar) z^{-1/2-iE/\hbar} e^{z^2/2\hbar}, \quad (2.34)$$

qui ressemble fort aux expressions WKB ci-dessus (les formules complètes sont dans [1, §4.1]). Ces développements nous renseignent donc sur la forme semi-classique des fonctions $\psi_{\lambda}^E(z)$ hors d'un voisinage de l'origine.

2.2.3 Comportement semi-classique des fonctions de Husimi

En se basant sur les développements asymptotiques ci-dessus, on a accès à la forme des fonctions de Husimi $H_\lambda^E(q, p)$ dans les deux régimes (E fixée non nulle, ou $E = O(\hbar)$) : on trouve (sans surprise) que ces densités se concentrent semi-classiquement le long de certaines branches constituant Σ_E : dans le premier cas, Σ_E est constituée de deux branches hyperboliques non connexes, dans le second Σ_E est la séparatrice, formée des 4 demi-axes \mathbb{R}_\pm , $i\mathbb{R}_\pm$ et de l'origine.

Rappelons tout d'abord que le mouvement classique d'une particule soumise à H_{hyperb} s'écrit :

$$\dot{z} = \bar{z}. \quad (2.35)$$

Si on décompose en $\delta z = \delta z_{\parallel} + \delta z_{\perp}$ un petit déplacement autour d'un point $z \in \Sigma_E$, la fonction de Husimi autour de chaque branche de Σ_E s'écrit alors (loin des point tournants, resp. de l'origine) :

$$H_\lambda^E(z, \bar{z}) \sim \frac{I}{|\dot{z}|} e^{-2|\delta z_{\perp}|^2/\hbar}, \quad (2.36)$$

le facteur I dépendant de λ et de la branche de Σ_E concernée. Semi-classiquement, ce facteur est interprété comme l'intensité du flux de particules le long de la branche concernée. La formule ci-dessus montre que ce flux est conservé le long de la branche, puisque la densité de particules est inversement proportionnelle à leur vitesse (cf [123]). Par conséquent, la fonction de Husimi ne satisfait pas à l'équation d'une densité classique invariante $\rho(q_0, p_0) = \rho(q_0 e^t, p_0 e^{-t})$ (alors que la fonction de Wigner de ψ_λ^E vérifie cette équation [13]). Cette 'non-classicité' est reliée au fait que l'épaisseur de $H^E(z, \bar{z})$ autour de la trajectoire classique Σ_E est indépendant de la position le long de la courbe (elle vaut $\sqrt{\hbar}$), ce qui est faux pour une densité classique ρ . Pour une énergie $E > 0$, la relation entre les flux le long des deux branches de Σ_E et le paramètre λ est :

$$\begin{aligned} I_+ &= I_{-i} = |K|^2 / \sqrt{2\pi\hbar}, \\ I_- &= I_{+i} = |K|^2 |\lambda|^2 / \sqrt{2\pi\hbar}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

où les indices correspondent aux demi-axes asymptotes des branches concernées : le flux arrivant de $p \rightarrow +\infty$ ($\Leftrightarrow z \rightarrow -i\infty$) se retrouve intégralement en $q \rightarrow +\infty$ ($\Leftrightarrow z \rightarrow +\infty$).

Dans le cas où la surface d'énergie est proche de la séparatrice, il peut y avoir échange de particules entre les quatre demi-axes, au niveau de l'origine. Les relations entre les flux concernés sont alors plus complexes :

$$\begin{aligned} I_+ &= |K|^2 / \sqrt{2\pi\hbar} \\ I_- &= |K|^2 |\lambda|^2 / \sqrt{2\pi\hbar} \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$I_{+i} = \frac{|K|^2/\sqrt{2\pi\hbar}}{2 \cosh(\pi E/\hbar)} \{|\lambda|^2 e^{\pi E/\hbar} + 2\Im(\lambda) + e^{-\pi E/\hbar}\} \quad (2.39)$$

$$I_{-i} = \frac{|K|^2/\sqrt{2\pi\hbar}}{2 \cosh(\pi E/\hbar)} \{|\lambda|^2 e^{-\pi E/\hbar} - 2\Im(\lambda) + e^{\pi E/\hbar}\}. \quad (2.40)$$

Les transferts entre ces branches correspondent physiquement à un effet tunnel à travers la barrière quadratique [13].

Ces flux sont bien définis loin des points singuliers des développements asymptotiques ; dans le cas $E > 0$, ces points sont les points tournants, qui sont situés *hors* de Σ_E , donc dans une région où la fonction de Husimi est de toute manière exponentiellement petite (ceci est d'ailleurs une des raisons pour lesquelles la méthode WKB est plus 'lisse' en représentation de Bargmann qu'en représentation de Schrödinger, où les points tournants sont forcément sur l'axe réel qui porte la solution, et doivent être traités par approximation uniforme [125]). En revanche, pour $E = O(\hbar)$, le point singulier des développements asymptotiques (c'est-à-dire l'origine) est sur la séparatrice, qui 'porte' les grandes valeurs de la fonction de Husimi. La valeur de la densité H_λ^E en ce point ne peut donc provenir d'arguments asymptotiques (les formules (2.36) divergent en l'origine), mais doit être calculée exactement :

$$H_\lambda^E(0, 0) = \frac{|K|^2|1 + \lambda|^2}{2\pi\hbar\sqrt{8\pi}} \left| \Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{E}{2\hbar}\right) \right|^2. \quad (2.41)$$

Cette valeur ne correspond à un maximum absolu de $H^E(z, \bar{z})$ que dans le cas pair $\lambda = 1$ (dans le cas impair, la fonction s'annule en l'origine). Elle est de nature purement quantique et peut être attribuée à l'étalement de la particule dû aux relations de Heisenberg.

2.2.4 Représentation stellaire des fonctions propres

Pour déterminer la position des zéros des fonctions $\psi_\lambda^E(z)$, nous utiliserons conjointement des informations asymptotiques (c'est-à-dire les développements WKB et à grand $|z|/\hbar$ des fonction de Bargmann) et exactes.

Tout d'abord, on connaît exactement les coefficients a_0, a_1, a_2 apparaissant dans le préfacteur du produit de Hadamard (voir [1], eq. (23)). Les zéros ne peuvent être connus qu'approximativement (excepté le zéro en l'origine pour les fonctions impaires). Pour cela, on se base essentiellement sur les développements asymptotiques de $\psi_\lambda^E(z)$. Ceux-ci consistent en général (dans chaque secteur \mathcal{S}_j) en une somme de deux termes exponentiels :

$$\psi_\lambda^E(z) \sim f_+^{(j)}(z) e^{i\phi(z)/\hbar} + f_-^{(j)}(z) e^{-i\phi(z)/\hbar}, \quad (2.42)$$

où les fonctions $f_\pm^{(j)}(z)$ dépendent du secteur où on se trouve et de λ , mais pas de \hbar . Semi-classiquement, cette somme ne peut s'annuler que si aucune des fonctions

$f_{\pm}^{(j)}$ n'est nulle, et si la phase $\phi(z)$ est purement réelle (sans quoi un des deux termes domine l'autre). On trouve donc que les zéros sont distribués asymptotiquement le long de *lignes* dans le plan complexe (pour certaines valeurs de λ , ces lignes sont dites d'*anti-Stokes* : tout comme les lignes de Stokes décrites plus haut, elle rejoignent les points tournants, mais correspondent à des valeurs *réelles* de l'action $\phi(Z_{\pm}, Z)$). Plus précisément, les zéros dans le secteur \mathcal{S}_j seront situés asymptotiquement aux positions données par l'équation implicite

$$\phi(z) = \pi n \hbar + \frac{\hbar}{2i} \log \left(\frac{-f_{-}^{(j)}(z)}{f_{+}^{(j)}(z)} \right), \quad \text{où } n \text{ est un entier.} \quad (2.43)$$

En général, dans un secteur donné, les entiers n peuvent parcourir un intervalle $[n_o, \infty)$ ou $(-\infty, n_o]$: on a alors une infinité de zéros dans le secteur, sauf si une des deux fonctions $f_{\pm}^{(j)}$ est rigoureusement nulle. On obtient les positions asymptotiques des zéros en inversant l'équation ci-dessus.

Pour notre système, les phases $\phi(z)$ ont à l'infini le comportement $\phi(z) \sim \pm iz^2/2$, donc les zéros lointains (s'il y en a dans le secteur considéré) auront une distribution du type :

$$z_n^{(j)} \sim e^{ij\pi/2} \sqrt{2in\hbar\pi} + o(\sqrt{n\hbar}). \quad (2.44)$$

Autrement dit, ils ont comme asymptotes les 4 bissectrices. On vérifie que ce développement est compatible avec (2.7). Pour obtenir les termes suivants du développement ci-dessus, il faut connaître explicitement la phase $\phi(z)$ et $f_{\pm}^{(j)}$. On obtient alors des choses différentes selon qu'on se place à énergie non-nulle ou au contraire d'ordre \hbar . Dans le second cas, on peut utiliser un peu de géométrie plane pour se figurer ce qui se passe lorsqu'on fait varier λ , à E/\hbar fixé. Sur la sphère de Riemann \mathbb{T} parcourue par λ , considérons les deux cercles C_{\pm} de centres $c_{\pm} = \pm i e^{\pm E/\hbar}$, de rayons $R_{\pm} = (1 + e^{\pm 2\pi E/\hbar})^{1/2}$ (v. fig. 2.2). Les zéros de $\psi_{\lambda}^E(z)$ dans le premier quadrant S_0 ont alors les positions asymptotiques suivantes ($n \in [n_o, \infty)$, n_o restant à déterminer) :

$$\frac{Z_n^{(0)^2}}{\hbar} \sim (2n-1)\pi - \frac{E}{\hbar} \log(4n\pi) + \arg \Gamma(1/2 + iE/\hbar) - i \log \frac{\lambda - c_-}{R_-} + O\left(\frac{\log n}{n}\right). \quad (2.45)$$

(voir [1, section 6] pour les autres secteurs). Cette équation n'a bien sûr de sens que lorsque λ est différent de $\{c_-, \infty\}$: ces deux valeurs correspondent à des fonctions ψ_{λ}^E n'ayant pas de zéros 'lointains' (c'est-à-dire $|Z_n^{(0)}| \gg \sqrt{\hbar}$) dans le secteur considéré. Lorsque λ se rapproche d'une de ces valeurs critiques, les zéros du secteur S_0 partent à l'infini collectivement. Pour le voir, on ne peut utiliser l'équation (2.45), car le terme dépendant de λ peut être de l'ordre de Z^2/\hbar . Il faut donc revenir à l'équation implicite (2.43), qui se transforme en

$$\frac{Z_n^2}{\hbar} \sim (2n-1)\pi - i \log \frac{\lambda - c_-}{R_-} - \frac{E}{\hbar} \log(2Z_n^2/\hbar) + \arg \Gamma(1/2 + iE/\hbar). \quad (2.46)$$

Dans l'équation ci-dessus, le terme dominant peut être soit le second, soit le premier (auquel cas les zéros sont proches des bissectrices). Cette formule correspond alors non seulement aux zéros dans S_0 , mais également dans un secteur adjacent (c'est-à-dire qu'on peut prendre $n \in \mathbb{Z}$). La solution de cette équation pour $\lambda \rightarrow c_-$ donne alors lieu à la fuite des zéros à l'infini, le long de branches d'hyperboles [1, fig. 4].

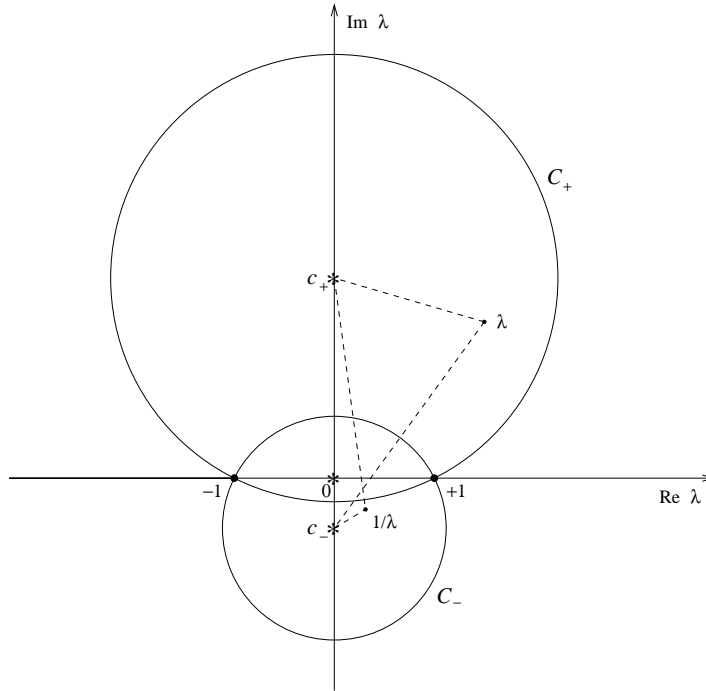


FIG. 2.2 – Plan complexe de la variable λ . Le cercle C_- correspond aux solutions $\psi(Z)$ réelles.

Ingrédients extra-asymptotiques

Les formules ci-dessus ne nous donnent accès qu'aux zéros $\gg \sqrt{\hbar}$. De plus, les indices n, m dans les estimations ci-dessus ne correspondent pour l'instant à aucun comptage précis des zéros le long des lignes concernées. Pour obtenir des informations sur ce qui se passe dans le voisinage de l'origine, on utilise :

- la *régularité* des zéros lors d'une déformation continue des paramètres E/\hbar et λ des fonctions propres : le zéro d'une fonction analytique (compté avec multiplicité) est une singularité topologique, qui ne peut pas apparaître ni disparaître subitement en un point de \mathbb{C} par perturbation de la fonction.
- toutes les fonctions $\psi_\lambda^E(Z)$ sont solutions (non identiquement nulles) de

l'équation différentielle du second ordre

$$(-\hbar^2 \frac{d^2}{dZ^2} - Z^2) \psi^E(Z) = 2E \psi^E(Z). \quad (2.47)$$

Par conséquent, elles ne peuvent s'annuler en même temps que leur dérivée première. Autrement dit, elles n'ont que des zéros *simples*.

- L'équation ci-dessus a des coefficients réels, donc elle admet des solutions réelles (c'est-à-dire telles que $\psi^E(\bar{Z}) = \overline{\psi^E(Z)}$). Les zéros de ces fonctions seront soit sur l'axe réel, soit en paires conjuguées complexes $\{Z_j, \bar{Z}_j\}$. Comme il n'y a que des zéros simples, lors d'une déformation réelle de ψ^E , les $Z_j \in \mathbb{R}$ resteront réels, et les Z_j complexes resteront dans le même demi-plan. Ces solutions réelles correspondent à certaines valeurs de λ ; en analysant le terme indépendant de m dans l'équation (2.45), on s'aperçoit que des zéros réels lointains ne sont compatibles qu'avec la condition $\lambda \in C_-$. Comme on sait que ces solutions réelles forment un espace vectoriel de dimension 2 (sur \mathbb{R}), elles correspondent donc à tout le cercle C_- . Par une analyse similaire, on trouve que les constellations des $\psi_\lambda^E(Z)$ sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire pur lorsque $\lambda \in C_+$.
- Nous avons déjà fait remarquer que les fonctions propres sont des Bessel lorsque $E = 0$. Or on connaît assez bien les zéros de ces fonctions. En particulier, on sait que pour les fonctions paire ($\lambda = 1$) et impaire ($\lambda = -1$), les zéros sont soit réels, soit imaginaires purs. On sait aussi les compter exactement le long de ces axes : par exemple, pour la fonction $\psi_1^0(Z)$, le n -ième zéro le long de \mathbb{R}_+ sera à une position $Z_n \sim \sqrt{\hbar(2m\pi - 3\pi/4)}$.

En utilisant les arguments ci-dessus, on peut suivre les pérégrinations d'un zéro précis (par exemple Z_n donné ci-dessus) lors de déformations continues des fonctions propres, à travers les formules asymptotiques (2.45) : si λ est maintenu à sa valeur 1, en variant E/\hbar à partir de 0, on trouve ainsi que la formule (2.45) correspondra effectivement au n -ième zéro sur l'axe \mathbb{R}_+ ; on sait aussi que la fonction $\psi_1^E(Z)$ n'a pas de zéro en dehors des axes (ce qui n'était pas visible sur la formule asymptotique) On peut ensuite faire varier λ sur C_- (par exemple dans le sens trigonométrique) : ce zéro Z_n reste réel, mais il avance (vers la droite) le long de l'axe, dans un mouvement collectif. Lorsque λ a fait un tour complet du cercle, Z_n a pris la position qu'avait Z_{n+1} avant la variation. Au contraire, les zéros qui se trouvaient sur l'axe imaginaire ont effectué un 'petit tour', et sont revenus à leur position initiale.

Ce type de raisonnement peut également s'appliquer aux cas d'énergie fixée $E \neq 0$, à partir des expressions WKB correspondantes [1, §6.6].

2.2.5 Confirmation numérique

Notre objectif originel était de modéliser les fonctions propres de systèmes hamiltoniens présentant une séparatrice, dans un voisinage du point fixe hyper-

bolique. Nous n'avons pas diagonalisé l'hamiltonien de double puits $H_{d.p.}$ décrit plus haut, mais avons plutôt considéré l'hamiltonien bipériodique de Harper $H_{\text{Harper}} = -\cos(2\pi q) - \cos(2\pi p)$, qu'on diagonalise sur les espaces $\mathcal{H}_{N,\kappa}$ d'états quantiques sur le tore (cf. section 3.1). Cet hamiltonien a une séparatrice pour l'énergie nulle, qui joint les points hétéroclines $(0, 1/2)$ et $(1/2, 0)$. Lorsque $\hbar \rightarrow 0$, il existe dans chaque espace $\mathcal{H}_{N,\kappa}$ un état propre $\psi_{j,\kappa}$ d'énergie $E_{j,\kappa}$ proche de 0. Cette famille d'états a été analysée en détail par Faure [58], qui a montré qu'ils sont *délocalisés*, comme le serait une particule classique voyageant le long de la séparatrice ; en particulier, tout point du tore correspond à un zéro de la fonction de Bargmann $\psi_{j,\kappa}(z)$ pour au moins une valeur de κ . Nous nous sommes contentés de dessiner la fonction de Husimi de cet état dans l'espace $\mathcal{H}_{N,0}$ (conditions de bord périodiques), pour la valeur $N = 1/h = 31$. Nous l'avons comparée (fig. 2.3) à son 'modèle' $\psi_1^E(Z)$ (d'où la rotation de $\pi/4$). On trouve que les zéros des deux fonctions coïncident presque parfaitement non seulement dans le voisinage du point hyperbolique, mais en fait jusqu'à ce que les contraintes de périodicité de $\psi_{j,0}(z)$ rompent le charme.

La question menant à la suite (mais qui n'a pour l'instant pas de réponse définitive) est la suivante : ces fonctions propres de \hat{H}_{hyperb} pourraient-elles également modéliser les fonctions propres de systèmes à temps discret, au moins autour d'un point fixe instable ? En particulier, les cicatrices observées sur les états propres chaotiques ont-elles une forme similaire à celle des fonctions de Husimi $H_\lambda^E(q, p)$ près du point fixe ?

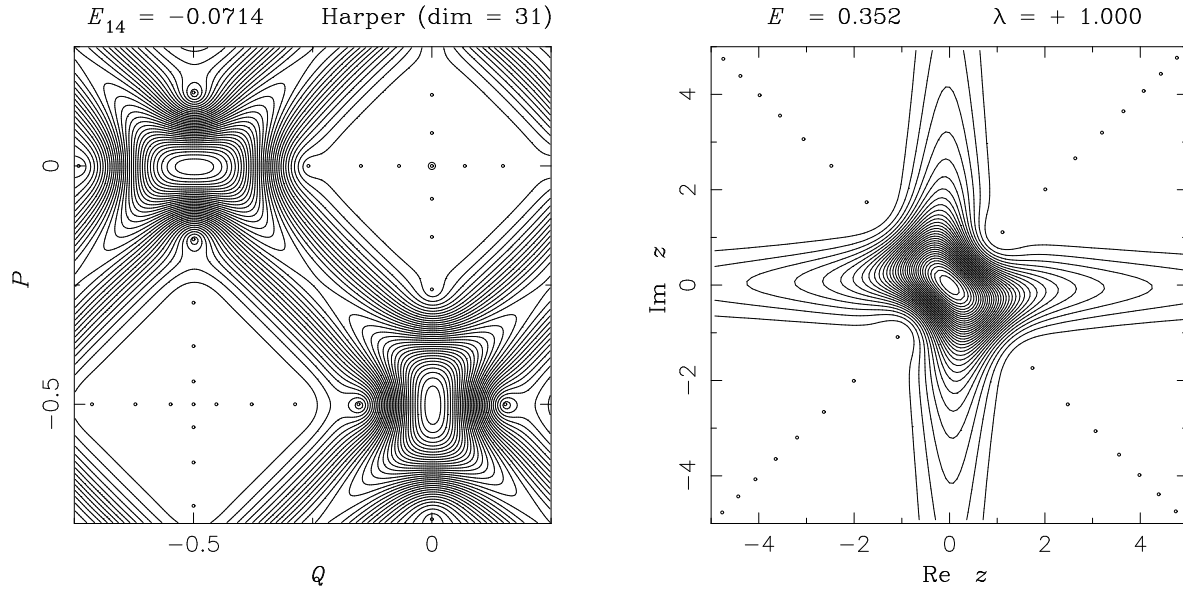


FIG. 2.3 – Fonctions de Husimi de deux états propres (les niveaux des contours sont espacés de 0.089, les zéros sont indiqués par les cercles). À gauche, le quinzième état propre de H_{Harper} , pour $N = 31$ (en utilisant des conditions périodiques pour les états propres : $\kappa = 0$). Le zéro de la fonction de Bargmann en l'origine est double. À droite, l'état propre de H_{hyperb} correspondant au même écart par rapport à la séparatrice (la rotation de $\pi/4$ correspond au passage $z \rightarrow Z$). La valeur de la fonction de Husimi en l'origine est ≈ 6.752 .

Chapitre 3

Chaos quantique sur le tore

Les transformations canoniques les plus simples pour lesquelles on a une preuve rigoureuse des propriétés chaotiques (ergodicité, mélange, propriétés d'Anosov) sont des applications sur le 2-tore \mathbb{T}^2 [8]. Leur dynamique classique a été étudiée en détail (par exemple, on connaît exactement toutes leurs orbites périodiques). Ces applications ne découlent pas d'un hamiltonien sur \mathbb{T}^2 dépendant du temps, elles sont de vraies applications à temps discret ; cependant, grâce à des propriétés de linéarité, on sait construire de façon cohérente des applications quantiques correspondantes, au sens donné dans la section 1.1.4. Avant cela, il faut tout d'abord définir ce que signifie la mécanique quantique sur le tore (vu comme espace des phases).

3.1 Mécanique quantique sur le 2-tore

Il s'agit de décrire de façon cohérente l'analogue quantique d'une particule se déplaçant dans un *espace des phases* ayant la structure du 2-tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire que la position et l'impulsion de la particules sont définies modulo \mathbb{Z} . Une densité de probabilité classique sur cet espace des phases sera donnée par une fonction bipériodique positive $\rho(q, p)$, avec la normalisation

$$\int_{\mathbb{T}^2} \rho(q, p) dq dp = 1.$$

Avant de construire l'analogue quantique d'une telle densité (c'est-à-dire une densité de Husimi définie sur le 2-tore), nous commençons par décrire les espaces de Hilbert adaptés à la géométrie torique. Nous choisissons une présentation assez 'physique', similaire à la construction des fonctions d'ondes de Bloch en physique du solide [86, 36].

L'espace de configuration étant unidimensionnel, une fonction d'onde sera une distribution $\psi(q) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, avec les propriétés de quasi-périodicité :

$$\langle q+1 | \psi \rangle = e^{2i\pi\kappa_1} \langle q | \psi \rangle \quad (3.1)$$

$$\text{et } \langle p+1|\psi\rangle = e^{-2i\pi\kappa_2}\langle p|\psi\rangle, \quad (3.2)$$

la transformée de Fourier étant définie par

$$\tilde{\psi}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\frac{qp}{\hbar}} \psi(q) dq. \quad (3.3)$$

La possibilité de choisir le paramètre $\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_1 + i\kappa_2$ (les κ_i sont appelés angles de Floquet) non nul vient du fait que les fonctions d'onde $\psi(q)$ et $e^{2i\pi\kappa_1}\psi(q)$ représentent un même état quantique sur l'intervalle $[0,1)$, et de même pour leur transformées de Fourier (dans [3], cet angle κ a été noté ϕ). Ces deux relations de quasi-périodicité ne sont pas indépendantes, car les observables \hat{q} et \hat{p} ne commutent pas : la quasi-périodicité de position implique une quantification des impulsions : $\tilde{\psi}(p) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\psi}_n \delta(p - p_n)$, avec $p_n = 2\pi\hbar(n + \kappa_1)$ et $\tilde{\psi}_n = \sqrt{2\pi\hbar} \int_0^1 e^{-iqp_n/\hbar} \psi(q) dq$. Une telle forme pour $\tilde{\psi}(p)$ est compatible avec la condition (3.2) si et seulement si il existe un entier positif N tel que :

$$2\pi\hbar N = 1. \quad (3.4)$$

La conjugaison des relations (3.1,3.2) débouche donc sur une quantification de la constante de Planck. Pour des valeurs de \hbar incompatibles avec l'équation ci-dessus, on ne peut définir une fonction d'onde sur le tore de cette manière (cependant, on peut toujours étudier une mécanique quantique sur le tore, mais dont l'espace de Hilbert sera de dimension infinie [19]).

Ce même phénomène de quantification de la constante de Planck apparaît dès qu'on veut quantifier d'autres espaces des phases compacts (par exemple la 2-sphère). Cette contrainte signifie intuitivement qu'on ne peut mettre qu'un seul état quantique par cellule de l'espace de phase de taille $(2\pi\hbar)^d$ (ici, $d=1$).

Pour une valeur $\hbar = 1/2\pi N$, la quasi-périodicité de $\tilde{\psi}(p)$ implique que $\tilde{\psi}_{n+N} = e^{-2i\pi\kappa_2} \tilde{\psi}_n$; la distribution ψ est donc donnée par N coordonnées $\{\tilde{\psi}_n, n = 0, \dots, N-1\}$. Autrement dit, ψ appartient à un espace vectoriel complexe de dimension N (qui se trouve être exactement le nombre de cellules de taille $2\pi\hbar$ sur le tore). Ce sous-espace de distributions $\mathcal{S}'_{N,\kappa}$ admet comme base les 'peignes de Dirac' :

$$|q_j\rangle_{N,\kappa} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi m \kappa_1} |q_j + m\rangle, \quad j = 0, \dots, N-1, \quad (3.5)$$

où les positions q_j sont quantifiées de façon duale aux p_m : $q_j = 2\pi\hbar(\kappa_2 + j)$.

Tout opérateur $U(Q, P) = e^{i(P\hat{q} - Q\hat{p})/\hbar}$ de translation dans \mathbb{R}^2 agit naturellement sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, mais il ne laisse $\mathcal{S}'_{N,\kappa}$ invariant que si Q, P sont multiples entiers de $1/N$ (ces opérateurs appartiennent alors à un sous-groupe discret du groupe de Heisenberg à une dimension). On peut alors définir une structure de Hilbert sur $\mathcal{S}'_{N,\kappa}$ telle que toute translation discrète $U(n/N, m/N)$ soit unitaire. À une constante près, cette structure est unique, donnée par

$$\langle q_j | q_{j'} \rangle_{N,\kappa} = \delta_{jj'}, \quad \forall j, j' = 0, \dots, N-1. \quad (3.6)$$

Nous discuterons du choix de la normalisation de ce produit scalaire plus bas. On obtient ainsi un espace de Hilbert de dimension N , noté $\mathcal{H}_{N,\kappa}$, d'états quantiques sur le tore. Une observable (resp. un propagateur) quantique sera donnée par une matrice $N \times N$ hermitienne (resp. unitaire) sur cet espace. On sait quantifier de façon canonique (à la Weyl) une observable classique, c'est-à-dire faire correspondre à une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ une matrice hermitienne $Op_{N,\kappa}^W(f)$ (v. éq. (3.25)); en revanche, on n'a pas de formalisme *général* pour quantifier une transformation canonique du tore. On sait le faire, plus ou moins au cas-par-cas, en particulier pour certaines transformations linéaires par morceaux (transformation du chat, du boulanger, en dent de scie).

Remarques sur le paramètre de Floquet κ

Pour $\hbar = 1/2\pi N$ fixé, on a un continuum d'espaces quantiques $\mathcal{H}_{N,\kappa}$, indexés par les angles de Floquet κ_i . Bien qu'isomorphes, ces espaces sont, d'une part, différents en tant que sous-espaces de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, et d'autre part, pour une observable classique $f(q, p)$ sur \mathbb{T}^2 , la matrice $Op_{N,\kappa}^W(f)$ sur $\mathcal{H}_{N,\kappa}$ dépend de κ , ainsi que ses valeurs propres. Les valeurs propres de $Op_{N,\kappa}(A)$ étant continues en κ , on obtient ainsi la décomposition du spectre de $Op_N(f)$ en N bandes de niveaux d'énergie, chaque bande correspondant à une famille continue d'états propres de niveau j : $\{|\psi_j\rangle_{N,\kappa}, \kappa \in \mathbb{T}^2\}$ [51].

L'étude de la dépendance du spectre vis-à-vis du paramètre de Floquet κ peut mener à des phénomènes remarquables lorsqu'on étudie une famille paramétrée d'opérateurs [58] : la structure en bandes devient cruciale lorsqu'apparaît une dégénérescence entre deux niveaux, pour une certaine valeur des paramètres.

À la limite $N \rightarrow \infty$, les valeurs discrètes de position q_j et d'impulsion p_n deviennent denses dans $[0, 1]$, quelle que soit la valeur de κ . De plus, on s'attend à ce que les différences entre les quantifications dans deux espaces $\mathcal{H}_{N,\kappa}$, $\mathcal{H}_{N,\kappa'}$ soient d'ordre sous-dominant, afin de retrouver une limite classique indépendante de κ . Par conséquent, dans ce travail nous nous bornerons généralement à quelques valeurs particulières de κ , essentiellement le cas périodique $\kappa = 0$ et anti-périodique $\kappa = \hat{0} \stackrel{\text{def}}{=} (1+i)/2$. Notons tout de même que la quantification des applications du chat nécessite souvent de considérer plusieurs espaces $\mathcal{H}_{N,\kappa}$ (voir section 3.3.2).

Construction alternative des espaces $\mathcal{H}_{N,\kappa}$

On peut également construire les espaces de distribution $\mathcal{S}'_{N,\kappa}$ en appliquant un opérateur de symétrisation $S(N, \kappa)$ sur les fonctions $\psi(q) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ [36] :

$$S(N, \kappa)\psi = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} (-1)^{Nnm} e^{2i\pi(\kappa_1 n - \kappa_2 m)} U(n, m) \psi. \quad (3.7)$$

Il est clair que cette symétrisation débouche automatiquement sur des distributions ayant les propriétés de quasi-périodicité de $\mathcal{S}'_{N,\kappa}$. Avec notre choix de produit

scalaire sur $\mathcal{H}_{N,\kappa}$, on montre que ces opérateurs de symétrisation constituent une décomposition en intégrale directe de $L^2(\mathbb{R})$. Autrement dit, tout vecteur de $L^2(\mathbb{R})$ peut se décomposer en une combinaison linéaire de ses projetés $S(N, \kappa)\psi$, et on a la relation suivante sur les normes des différents espaces :

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = N \int_{[0,1]^2} d^2\kappa \|S(N, \kappa)\psi\|_{\mathcal{H}_{N,\kappa}}^2. \quad (3.8)$$

Le facteur N dans l'intégrale provient d'un choix différent de normalisation du produit scalaire de celle choisie dans [36].

3.2 Représentation de Bargmann sur le tore

Dans le plan \mathbb{R}^2 , les états cohérents standards ont été définis comme les translatés de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique $|0\rangle$. Grâce à la relation de fermeture (2.3), ces états permettent d'identifier isométriquement les espaces de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ avec l'espace de fonctions entières \mathcal{F}_{\hbar} . La transformation de Bargmann $\psi(q) \mapsto \psi(z)$, donnée par la formule (2.1), peut être étendue à des distributions tempérées $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (on a déjà utilisé cette propriété dans la section 2.2). En particulier, on peut transformer un vecteur $\psi \in \mathcal{S}'_{N,\kappa}$ en une fonction entière qui sera encore d'ordre 2. Le vecteur 'position' $|q_j\rangle_{N,\kappa}$ donne alors

$$\langle z | q_j \rangle_{N,\kappa} = \frac{1}{(\pi\hbar)^{1/4}} e^{2\pi N(-\frac{1}{2}(z^2 + q_j^2) + \sqrt{2}zq_j)} \theta_3\left(i\pi N(\sqrt{2}z - q_j + i\frac{\kappa_1}{N}) | iN\right), \quad (3.9)$$

où θ_3 est la fonction thêta de Jacobi définie avec les conventions de [127] :

$$\theta_3(Z|\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi\tau n^2 + 2inZ}, \quad \text{pour tous } Z, \tau \in \mathbb{C}, \Im(\tau) > 0. \quad (3.10)$$

On obtient ainsi un espace de fonctions entières $\mathcal{F}_{N,\kappa}$ de dimension N , qui est exactement caractérisé par les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \psi(z + 1/\sqrt{2}) &= e^{2i\pi\kappa_1} e^{\pi N(1/2 + \sqrt{2}z)} \psi(z) \\ \psi(z + i/\sqrt{2}) &= e^{2i\pi\kappa_2} e^{\pi N(1/2 - i\sqrt{2}z)} \psi(z). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ces relations de quasi-périodicité par rapport au tore complexe $T_{\mathbb{C}}$ (de périodes $1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2}$) sont le pendant dans $\mathcal{F}_{N,\kappa}$ des relations (3.1, 3.2) définissant $\mathcal{S}'_{N,\kappa}$. Elles fournissent des informations sur la structure analytique de $\psi(z)$, en particulier sur ses zéros [86]. Il est clair que l'ensemble des zéros de $\psi(z)$ est $T_{\mathbb{C}}$ -périodique ; il y a exactement N zéros par cellule fondamentale, et ceux-ci sont contraints par la relation

$$\sum_{l=1}^N z_l = N \left(\frac{1+i}{2\sqrt{2}} \right) - \frac{i\kappa}{\sqrt{2}} \mod T_{\mathbb{C}}. \quad (3.12)$$

Dans l'équation ci-dessus et par la suite, le nombre complexe z_l est un représentant sur \mathbb{C} du point de $T_{\mathbb{C}}$ correspondant. En particulier, si les zéros ne sont pas dégénérés, on aura alors $l \neq l' \implies z_l \not\equiv z_{l'} \text{ modulo } T_{\mathbb{C}}$. Enfin, mieux que pour les fonctions de Bargmann du plan, on peut reconstruire $\psi(z)$ uniquement à partir de ses zéros (à une constante de normalisation près, bien entendu). Pour cela, on utilise une 'brique fondamentale' adaptée à $T_{\mathbb{C}}$, qui est donnée par

$$\chi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \langle z | q = 0 \rangle_{N=1, \kappa=(1+i)/2} = 2^{1/4} e^{\pi z^2} \theta_1(\pi \sqrt{2} z | i). \quad (3.13)$$

(Nous utilisons la notation de $\chi(z)$ de [3], qui diffère de celle de [2] par translation de $(1+i)/2\sqrt{2}$). L'unique fonction de $\mathcal{F}_{N, \kappa}$ s'annulant aux points $\{z_l\}$ de $T_{\mathbb{C}}$ est alors donnée par :

$$\psi(z) = \langle z | \psi \rangle_{N, \kappa} = \text{const.} \times e^{2\pi z \sum_{l=1}^N \bar{z}_l} \prod_{l=1}^N \chi(z - z_l). \quad (3.14)$$

Cette formule de factorisation est l'analogue sur le tore du produit de Hadamard (2.8) pour les fonction de Bargmann dans le plan. Sur le tore on n'a pas de degré de liberté supplémentaire aux N zéros (les coefficients a_1 et a_2 dans le facteur exponentiel de (2.8)). Du fait de la contrainte (3.12), les zéros constituent $N - 1$ degrés de liberté complexes, ce qui correspond exactement à la dimension de l'espace (projectif) des états quantiques dans $\mathcal{H}_{N, \kappa}$.

3.2.1 Analogie avec les fonctions d'onde de Landau

Le formalisme que nous venons de développer pour 'quantifier le tore' apparaît naturellement lorsqu'on étudie la dynamique d'une particule chargée placée dans un potentiel bidimensionnel périodique, et soumise à un fort champ magnétique transverse (supposé constant). En absence de potentiel, le champ magnétique a comme effet de placer les particules sur des niveaux d'énergie, dits niveaux de Landau. En effet, si on choisit le potentiel vecteur $\vec{A} = (-By/2, Bx/2)$, l'hamiltonien (à deux dimensions) s'écrit (en posant $2m = c = 1$) [5] :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{Landau}} &= (\vec{p} - e\vec{A})^2 \\ &= ([p_x - eA_x] - i[p_y - eA_y]) ([p_x - eA_x] + i[p_y - eA_y]) + \hbar e B. \end{aligned} \quad (3.15)$$

C'est donc le produit d'un opérateur différentiel du premier ordre par son conjugué hermitien. En procédant par analogie avec l'oscillateur harmonique unidimensionnel, on trouve des niveaux d'énergie infiniment dégénérés, du type $E_n = 2eB\hbar(n + 1/2)$, pour $n \in \mathbb{N}$, appelés niveaux de Landau. Les états du niveau fondamental ($n = 0$) sont donnés par l'équation

$$\begin{aligned} ([p_x - eA_x] + i[p_y - eA_y])\psi &= 0 \\ \iff (\partial_x + i\partial_y)\psi(x, y) + \frac{eB}{2\hbar}(x + iy)\psi(x, y) &= 0 \\ \iff \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\psi(x, y) e^{\frac{eB}{4\hbar} z \bar{z}} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

où on a noté $z = x + iy$ la variable complexe représentant la position dans le plan. On en déduit donc que les fonctions d'onde des états du premier niveau de Landau sont données par des fonctions entières $f(z) : \psi(x, y) = f(z) e^{-\frac{z\bar{z}}{4l^2}}$, où $l \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\hbar/eB}$ est la longueur magnétique. La réduction dimensionnelle correspond, au niveau quantique, à projeter la dynamique sur le premier niveau de Landau. En supposant que les niveaux excités sont trop élevés pour intervenir de façon importante dans la dynamique, la projection sur le premier niveau de Landau est donc analogue à une réduction dimensionnelle au niveau quantique, puisque les fonctions d'ondes sont identiques à des fonctions de Bargmann dans le plan, mais elles représentent vraiment la fonction d'onde de l'électron dans l'espace physique.

Si maintenant on impose un potentiel électrique périodique par rapport à un réseau (par exemple un réseau carré), il faut alors décomposer les états décrits ci-dessus dans une base d'états de Bloch, c'est-à-dire invariants par rapport aux *translations magnétiques* du réseau. Par exemple, la période $x \rightarrow x + 1$ impose l'équation de pseudo-périodicité :

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i}{\hbar}(p_x - eAx)} \psi &= e^{2i\pi\kappa_1} \psi \\ \iff f(z+1) &= e^{2i\pi\kappa_1} \exp\left\{\frac{1}{4l^2} + \frac{z}{2l^2}\right\} f(z), \end{aligned} \quad (3.17)$$

ainsi qu'une équation similaire pour la translation $y \rightarrow y + 1$. κ_1 et κ_2 sont alors les paramètres de Bloch de la fonction d'onde. Ces deux équations sont identiques à (3.11), elles n'ont donc de solution que si la longueur magnétique (et donc le champ magnétique) prend des valeurs quantifiées : $eB/\hbar = 2\pi N$ (autrement dit, pour des valeurs autres du champ magnétique, il n'existe pas de fonctions propres ayant ces propriétés de quasi-périodicité [51]). Les fonctions d'onde obtenues sont donc les fonctions θ décrites ci-dessus (3.9).

Bien que ce formalisme ait été mis sur pied depuis un certain temps [129, 5, 51], il a été largement utilisé dans les travaux concernant l'effet Hall quantique [65, 9]. Le potentiel périodique $V(x, y)$ a pour effet de briser la dégénérescence du niveau de Landau en N bandes, correspondant chacune à une famille $\{\psi_{j,\kappa}, \kappa \in [0, 1]^2\}$. Il est alors possible d'utiliser la représentation stellaire des états $\psi_{j,\kappa}$ pour définir un indice topologique (indice de Chern) associé à la bande j [9, 58] ; cet indice rend compte des propriétés de localisation de $\psi_{j,\kappa}$, donc des propriétés de conduction.

Lien entre représentations de Schrödinger et stellaire sur le tore

Ces degrés de liberté sont reliés de manière non-linéaire aux coordonnées de ψ dans la base $\{|q_j\rangle_{N,\kappa}\}$ de $\mathcal{H}_{N,\kappa}$, comme le montre bien la formule de factorisation. Nous explicitons un peu plus cette relation.

Lorsque l'espace des phases est la sphère [86], on a vu que les fonctions de Bargmann d'un spin S sont des polynômes de degré $2S$, dont les coefficients sont reliés simplement aux coordonnées de l'état dans la base $|S, j\rangle$ des états propres

de S_3 (voir la section 2.1.2). Les relations allant des $2S$ zéros z_l à ces coefficients sont simplement données par les formules de Newton :

$$\begin{aligned} \psi(z) = \prod_{l=1}^{2S} (z - z_l) &= \sum_{j=-S}^S a_j \sqrt{C_{2S}^{S+j}} z^{S+j} \quad \text{implique} \\ a_S = 1, \quad a_{S-j} \sqrt{C_{2S}^j} &= (-1)^j \sum_{l_1 < \dots < l_j} z_{l_1} \dots z_{l_j}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Nous avons obtenu une formule analogue pour les fonctions de Bargmann sur le tore : la donnée des zéros fixe la valeur de κ par (3.12), et on a

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \sum_{j=0}^{N-1} a_j \langle z | q_j \rangle_{N\kappa} = \prod_{k=1}^N e^{2\pi z \bar{z}_k} \chi(z - z_l), \\ \Rightarrow a_j &= C(\{z_l\}) e^{\pi \frac{j^2 + 2j\kappa_2}{N}} \sum_{\sum_l m_l = -j} e^{-\pi \sum_l m_l^2 + 2\sqrt{2}\pi \sum_l m_l (z_l - z_o)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

$C(\{z_l\})$ est un facteur de normalisation global assez compliqué dépendant de N et des zéros, $z_o = (1 + i)/2\sqrt{2}$; les coefficients m_l , ($l = 1, \dots, N$) décrivent les entiers. Pour trouver cette formule de développement, on a utilisé le fait que les fonctions theta forment une algèbre graduée (la graduation correspondant au nombre de zéros) [74]. En fait, nous ne nous servons pas de cette formule dans la suite, mais la présentons ici à titre de curiosité.

3.2.2 Densité de Husimi. Représentation stellaire sur \mathbb{T}^2

Pour l'instant, le noyau intégral $\langle z | q \rangle$ a permis d'identifier un espace vectoriel de distributions $\mathcal{S}'_{N,\kappa}$ à un espace de fonctions theta. Cette identification devient en fait une isométrie d'espaces hilbertiens si on munit $\mathcal{F}_{N,\kappa}$ du produit scalaire :

$$\forall \psi, \psi' \in \mathcal{F}_{N,\kappa}, \quad \langle \psi | \psi' \rangle_{N,\kappa} = 2 \int_{\mathbb{T}^2} d^2 z \overline{\langle z | \psi \rangle}_{N,\kappa} \langle z | \psi' \rangle_{N,\kappa} e^{-2\pi N |z|^2}. \quad (3.20)$$

Cette relation est l'analogue sur le tore du produit scalaire (2.4) sur \mathcal{F}_h . Elle nous mène donc de la même manière à la définition d'une densité de Husimi sur le tore : à chaque état ψ de $\mathcal{H}_{N,\kappa}$ on fait correspondre la fonction positive ou nulle

$$H_\psi(q, p) \stackrel{\text{def}}{=} |\langle z | \psi \rangle|^2 e^{-2\pi N z \bar{z}}. \quad (3.21)$$

Cette fonction est bipériodique par rapport à \mathbb{T}^2 , et elle s'annule quadratiquement aux points $x_l = (q_l, p_l)$ de \mathbb{T}^2 correspondant aux zéros z_l de $\psi(z)$ ($z_l = 2^{-1/2}(q_l - ip_l)$). Cette fonction définit donc une densité de probabilité sur \mathbb{T}^2 (par rapport à la mesure de Lebesgue $dq dp$).

La propriété de factorisation des fonctions de Bargmann s'étend sans problème aux densités de Husimi (elle se simplifie même) :

$$H_\psi(x) = C_\psi \prod_{l=1}^N H_\chi(x - x_l), \quad (3.22)$$

où $H_\chi(x) = |\chi(z)|^2 e^{-2\pi z \bar{z}}$, $\chi(z)$ étant défini en (3.13). Grâce à ces formules de factorisation, toute l'information sur l'état ψ (outre une phase globale) est contenue dans sa constellation de zéros, qui est donnée par la mesure singulière :

$$\rho_\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} N^{-1} \sum_{l=1}^N \delta_{\text{per}}(x - x_l), \quad (3.23)$$

les fonctions δ_{per} étant périodisées par rapport à \mathbb{T}^2 .

Lien avec la transformée de Wigner sur le tore

Il existe plusieurs extensions 'naturelles' de la transformation de Wigner dans le plan à la géométrie torique [36]. Les opérateurs sur $\mathcal{H}_{N,\kappa}$ sont des matrices $N \times N$, qu'on peut décomposer sur la base des translations discrètes :

$$\hat{A} = \sum_{n,m=0}^{N-1} A_{n,m} U\left(\frac{m}{N}, \frac{n}{N}\right), \quad (3.24)$$

où les translations discrètes sont restreintes à $\mathcal{H}_{N,\kappa}$. On obtient naturellement cette décomposition en quantifiant à la Weyl une fonction lisse sur \mathbb{T}^2 , comme dans le plan :

$$\begin{aligned} f(q, p) &= \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} f_{n,m} e^{2i\pi(nq - mp)} \\ \implies Op_{N,\kappa}^W(f) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} f_{n,m} U\left(\frac{m}{N}, \frac{n}{N}\right) \Big|_{\mathcal{H}_{N,\kappa}}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

À partir de la décomposition (3.24), on peut définir la fonction de Wigner (que nous normalisons à l'unité, ce qui modifie d'un facteur N les notations de [36]) associée à \hat{A}

- soit comme la distribution $\sigma^W(\hat{A})$ sur le tore, qui fait correspondre à toute fonction lisse f la valeur $Tr(\hat{A} Op_{N,\kappa}^W(f))$. Plus explicitement, cette distribution est une somme de pics de Dirac centrés sur le sous-réseau carré de \mathbb{T}^2 de maille $1/2N$:

$$\sigma^W(\hat{A})(q, p) = \frac{1}{4N} \sum_{n,m,k=0}^{2N-1} \delta_{\text{per}}\left(q - \frac{n+m}{2N}\right) \delta_{\text{per}}\left(p - \frac{k}{2N}\right) A_{n,m} e^{2i\pi \frac{(m-n)k}{2N}}, \quad (3.26)$$

en utilisant une périodisation des coefficients $A_{n,m}$ pour $n, m \geq N$. Cette définition de la fonction de Wigner a par exemple été utilisée dans [67] pour décrire les fonctions propres du chat quantique.

- On peut au contraire représenter l'opérateur \hat{A} par l'analogue 'classique' de la formule (3.24) [48], c'est-à-dire par le polynôme trigonométrique

$$W(\hat{A})(q, p) = \sum_{n, m=0}^{N-1} e^{2i\pi(nq-mp)} \text{Tr}(U(\frac{m}{N}, \frac{n}{N})\hat{A}) = \sum_{n, m=0}^{N-1} A_{n, m} e^{2i\pi(nq-mp)}. \quad (3.27)$$

Pour les applications quantiques classiquement chaotiques, le théorème de Schnirelman s'applique aux deux types de transformations [36]. Dans les deux cas, on obtient la fonction de Wigner d'un état $\psi \in \mathcal{H}_{N, \kappa}$ en considérant $\hat{A} = |\psi\rangle\langle\psi|$. On voit donc que les deux différentes définitions ne dépendent que des coefficients

$$\psi_{n, m} \stackrel{\text{def}}{=} \langle\psi|U(\frac{m}{N}, \frac{n}{N})|\psi\rangle. \quad (3.28)$$

(bien entendu, ces coefficients quadratiques en ψ ne sont pas tous indépendants [48]). Le lien avec la densité de Husimi se fait par une déformation de convolution gaussienne (la formule ci-dessous n'est valable que pour N pair) :

$$\begin{aligned} H_\psi(q, p) &= \sum_{n, m=0}^{N-1} e^{-2i\pi(nq-mp)} e^{-\pi \frac{n^2+m^2}{2N}} \overline{\psi_{n, m}} \\ &\times \theta_3\left(\pi Nq + \pi \frac{m - in}{2} \middle| i \frac{N}{2}\right) \theta_3\left(\pi Np + \pi \frac{n + im}{2} \middle| i \frac{N}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Lorsque $n, m < N/2$, les fonctions thêta sont asymptotiquement de l'ordre de 1, donc on retrouve effectivement (dans cette limite) une convolution de $W(|\psi\rangle\langle\psi|)(q, p)$ par la gaussienne $(2N)^{-1} e^{-2\pi N x^2}$ apparaissant dans (2.11).

3.2.3 États cohérents sur le tore

Sur \mathbb{R}^2 , on s'est servi des états cohérents de Weyl pour représenter un état quantique par une fonction entière, sa transformée de Bargmann. Inversement, la représentation de Bargmann d'un état de $\mathcal{H}_{N, \kappa}$, décrite plus haut, va nous permettre d'exhiber une famille d'états 'cohérents' $|z\rangle_{N, \kappa}$ sur le tore $T_{\mathbb{C}}$ [36]. En fait, on se sert de la relation de fermeture sur $\mathcal{H}_{N, \kappa}$ donnée par n'importe quelle base orthonormée, par exemple celle des états de 'position' $|q_j\rangle_{N, \kappa}$. L'état cohérent est alors donné par

$$|z\rangle_{N, \kappa} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{N-1} \overline{\langle z|q_j\rangle_{N, \kappa}} |q_j\rangle_{N, \kappa}. \quad (3.30)$$

Autrement dit, $\forall z \in \mathbb{C}$, l'état cohérent $|z\rangle_{N, \kappa}$ est l'unique élément de $\mathcal{H}_{N, \kappa}$ tel que, pour tout état $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{N, \kappa}$, on ait ${}_{N, \kappa}\langle z|\psi\rangle = \psi(z)$. Ces états dépendent du paramètre z de façon anti-holomorphe, et leur normalisation dépend de la position z dans \mathbb{C} (et pas seulement dans $T_{\mathbb{C}}$), comme l'indiquent les relations

(3.11). On peut en fait donner leur normalisation sous une forme fermée (on se bornera au cas $\kappa = 0$), ou mieux, le produit scalaire de deux états cohérents :

$$\begin{aligned} N \text{ pair} : {}_N\langle z_1 | z_2 \rangle_N &= N e^{2\pi N z_1 \bar{z}_2} \theta_3\left(\pi N \frac{z_1 + \bar{z}_2}{\sqrt{2}} \mid iN/2\right) \theta_3\left(i\pi N \frac{z_1 - \bar{z}_2}{\sqrt{2}} \mid iN/2\right) \\ N \text{ impair} : {}_N\langle z_1 | z_2 \rangle_N &= N e^{2\pi N z_1 \bar{z}_2} \left\{ \theta_2\left(\pi\sqrt{2}N(z_1 + \bar{z}_2) \mid 2iN\right) \theta_4\left(i\pi N \frac{z_1 - \bar{z}_2}{\sqrt{2}} \mid iN/2\right) \right. \\ &\quad \left. + \theta_3\left(\pi\sqrt{2}N(z_1 + \bar{z}_2) \mid 2iN\right) \theta_3\left(i\pi N \frac{z_1 - \bar{z}_2}{\sqrt{2}} \mid iN/2\right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ces expressions nous fournissent en fait les fonctions de Bargmann des états cohérents $|z\rangle_{N,0}$ (des formules similaires ont été obtenues dans [80] lors du calcul de fonctions de Landau bipériodiques). Dans la limite $N \rightarrow \infty$, les expressions dans les cas pair et impair sont équivalentes, elles donnent en fait, à des corrections exponentielles près, la formule

$${}_N\langle z_1 | z_2 \rangle_N \sim N e^{2\pi N z_1 \bar{z}_2} \quad \text{lorsque } N \rightarrow \infty, \quad (3.32)$$

valable aussi longtemps que $(z_1 - z_2)$ est situé dans un carré compact de \mathbb{C} centré en l'origine, de côté $< 1/2\sqrt{2}$. Dans ce cas, on retrouve (au facteur N près) le produit scalaire des états cohérents du plan. En particulier, cette estimation est vraie si $z_1 = z_2$: pour N pair, la norme de l'état $|z\rangle_{N,0}$ vaut

$${}_N\langle z | z \rangle_N = N e^{2\pi N |z|^2} \theta_3(\pi N q \mid iN/2) \theta_3(\pi N p \mid iN/2). \quad (3.33)$$

Remarque

Ces états cohérents peuvent aussi être construits en appliquant l'opérateur de symétrisation $S(N, \kappa)$ aux états cohérents du plan $|z\rangle$ [36]. On a en fait

$$S(N, \kappa)|z\rangle = \frac{1}{N}|z\rangle_{N,\kappa} \quad (3.34)$$

(par rapport aux notations de [36], le facteur N^{-1} provient du choix différent de normalisation du produit scalaire sur $\mathcal{H}_{N,\kappa}$).

L'appellation “états cohérents” pour les $|z\rangle_{N,\kappa}$ n'est qu'en partie justifiée. D'une part, ils ne sont les états propres d'aucun opérateur d'annihilation ; d'autre part, même renormalisés par un facteur $e^{-N\pi|z|^2}$, ils ne peuvent être construits à partir d'un état de base $|0\rangle_{N,\kappa}$ par action du groupe des translations sur le tore. En fait, seuls les états séparés par $\Delta z = (n + im)/N\sqrt{2}$ sont images l'un de l'autre par un opérateur de translation : les autres translations entrelacent deux espaces $\mathcal{H}_{N,\kappa}$ distincts.

Néanmoins, ces états vérifient au moins deux propriétés fondamentales des états cohérents : d'une part, la résolution de l'identité sur chaque espace $\mathcal{H}_{N,\kappa}$ (eq. (3.20)).

D'autre part, comme le montre l'équation (3.32), les états $|z\rangle_N$ sont très (micro)localisés dans l'espace des phases, la fonction de Husimi de l'état *normalisé* $\frac{|z_o\rangle_N}{(|z_o\rangle_N)^{1/2}}$ valant approximativement

$$H_{|z_o\rangle}(z, \bar{z}) \sim N e^{-2\pi N |z - z_o|^2} \quad \text{lorsque } N \rightarrow \infty, \quad (3.35)$$

autrement dit on retrouve asymptotiquement la formule valable dans le plan. Cependant, il est possible de définir des familles alternatives d'états dans $\mathcal{H}_{N,\kappa}$ ayant des propriétés analogues : par exemple, l'état complètement dégénéré défini dans la section 4.2.2, ou encore l'état fondamental de l'hamiltonien de Harper (v. la conclusion de la section 2.2), qui fait office d'oscillateur harmonique sur le tore. Néanmoins, aucun d'entre eux ne vérifie la propriété de fermeture (3.20), qui est un ingrédient majeur de l'utilisation des états cohérents.

3.3 Deux transformations chaotiques du tore

Les transformations canoniques sur le tore que nous allons étudier ne sont pas des applications de Poincaré d'hamiltoniens de dimension supérieure, ni même des applications stroboscopiques, mais au contraire définies *ex nihilo* : on les a choisies pour leur simplicité, mais surtout parce que leurs propriétés chaotiques sont prouvées mathématiquement [8].

3.3.1 Transformation du boulanger

L'application du boulanger sur \mathbb{T}^2 [8, 113] est un prototype de *dynamique symbolique* : elle utilise le codage de chaque point (p, q) de l'espace des phases par une double suite infinie de 0 et 1, chacune correspondant au développement binaire de p (resp. de q). Ainsi, on note le point

$$(p, q) = \dots \epsilon_{-2} \epsilon_{-1}, \epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2 \dots, \quad \text{avec } \epsilon_j = 0 \text{ ou } 1. \quad (3.36)$$

La dynamique du boulanger consiste à faire avancer la virgule d'un cran :

$$(P, Q) = B(p, q) = \dots \epsilon_{-2} \epsilon_{-1} \epsilon_0, \epsilon_1 \epsilon_2 \dots \quad (3.37)$$

$$= \left(\frac{p + \epsilon_0}{2}, 2q - \epsilon_0 \right), \quad (3.38)$$

Localement, la dynamique est donc identique au flot de H_{hyperb} pendant un temps $(\log 2)^{-1}$. Cette application, *discontinue* sur la ligne $\{q = 1/2\}$, a donc les propriétés d'Anosov : elle est uniformément hyperbolique, d'exposant de Lyapunov $\lambda = \log 2$, et en chaque point les variétés stable et instable sont données par $W^s(q_o, p_o) = \{q = q_o\}$, $W^i(q_o, p_o) = \{p = p_o\}$ (c'est-à-dire les translatées des axes invariants par H_{hyperb}). La double suite (sans la virgule) définit exactement une

trajectoire entre $t = -\infty$ et $t = +\infty$, la virgule indiquant le moment auquel on se trouve. Une orbite n -périodique correspond à un mot $\epsilon_1 \dots \epsilon_n$ répété à l'infini. On obtient donc une description exhaustive des orbites périodiques.

Cette transformation possède la symétrie de parité $(q, p) \leftrightarrow (1-q, 1-p)$, ainsi que la propriété de renversement du temps par $(q, p) \leftrightarrow (p, q)$ (renversement du sens de lecture de la double suite). De telles symétries joueront un rôle important au niveau quantique.

Enfin, cette application est engendrée par la fonction génératrice $\tilde{A}(P, q)$, également discontinue, et définie uniquement dans les secteurs où les développements binaires de q et P commencent par le même chiffre ϵ_0 :

$$\tilde{A}_{\epsilon_0}(P, q) = 2Pq - \epsilon_0 P - \epsilon_0 q. \quad (3.39)$$

Si P et q ont un premier chiffre différent, ils ne peuvent être reliés par la transformation. Cette fonction génératrice nous permettra de quantifier cette transformation de façon exacte.

Application quantique du boulanger

En effet, si on applique brutalement la formule de Van Vleck (1.14) en utilisant les fonctions génératrices $\tilde{A}_{\epsilon_0}(P, q)$ dans les secteurs où q et P commencent par le même chiffre, on trouve l'expression suivante (dans une représentation mixte) :

$$\langle P | U_B | q \rangle = \frac{1}{2i\pi\hbar} \sqrt{2} e^{-i(2Pq - \epsilon_0(q+P))/\hbar}. \quad (3.40)$$

Après une périodisation (et donc quantification) des variables q, P données par les équations (3.1, 3.2), on obtient, dans le cas où N est *pair*, la même matrice dans chacun des deux secteurs $\{q, P < 1/2\}$, $\{q, P > 1/2\}$: il s'agit de la matrice de transformation de Fourier discrète à $N/2$ éléments : par exemple, dans le premier secteur (correspondant à $j, k < N/2$), les éléments de matrice de la transformation sont

$$\langle p_n | U_B | q_j \rangle_{N, \kappa} = \sqrt{2/N} e^{-\frac{4i\pi}{N}(n+\kappa_1)(j+\kappa_2)}. \quad (3.41)$$

Cet élément est identique à $\langle p_n + 1/2 | U_B | q_j + 1/2 \rangle_{N, \kappa}$ situé dans le second secteur autorisé classiquement, tandis que le reste des éléments de matrice de U_B est fixé à 0 (reflétant le fait que le passage de q à P est interdit classiquement).

Dans la représentation mixte, la matrice U_B agit donc de façon indépendante et *unitaire* sur chacun des deux blocs. Comme le passage des bases $|q_j\rangle_{N, \kappa}$ à $|p_n\rangle_{N, \kappa}$ est aussi unitaire (c'est la transformation de Fourier discrète à N éléments), on en déduit que la transformation totale U_B est unitaire sur tout $\mathcal{H}_{N, \kappa}$. on a donc construit une version quantique de l'application du boulanger [13] ayant les propriétés désirées (cf. section 1.1.4). Les propriétés des matrices U_B dans la limite semi-classique ont été étudiées par [114]. Nous nous bornerons à calculer leurs états propres (numériquement), dans le cas particulier $\kappa = \hat{0} \stackrel{\text{def}}{=} (1+i)/2$, pour

lequel la transformation quantique est invariante par parité et par renversement du temps (autrement dit, les symétries classiques du boulanger ne sont conservées quantiquement que pour cette valeur de κ).

3.3.2 Transformations du ‘chat’ d’Arnold

Les transformations du chat consistent en les automorphismes hyperboliques du 2-tore, c’est-à-dire les matrices $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ (autrement dit, à coefficients entiers et déterminant unité), de trace $|a + d| > 2$. La dynamique est simplement donnée par

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \mapsto S \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad \text{modulo } \mathbb{Z}, \quad (3.42)$$

donc elles sont invariantes par parité. Arnold avait au départ considéré la transformation $S_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, mais nous verrons que ce choix présente des complications pour la quantification. Pour nos calculs numériques, nous avons utilisé deux transformations :

$$S_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 24 & 41 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

La première est invariante par renversement du temps $(q, p) \leftrightarrow (q, -p)$. La seconde est la plus simple (à notre connaissance) dont la seule symétrie soit la parité (les notations S_1, S_2 correspondent à S, S' dans [3]). Nous utiliserons également la transformation $S_{\text{fig}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans les figures 3.1 et 3.2.

Comme pour le boulanger, le caractère linéaire de la transformation implique une uniformité de l’hyperbolicité : tout point de \mathbb{T}^2 a ses variétés stables et instables données par les deux sous-espaces propres de S , et l’exposant de Lyapunov positif (correspondant à la variété instable) est donné (pour tout x) par $\lambda = \log \frac{|a+d| + \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2}$. Une telle transformation est un archétype du système d’Anosov (elle peut aussi être formulée en termes de dynamique symbolique). Les points périodiques sont tous les points de coordonnées rationnelles.

Pour les applications de trace $a + d > -2$, la dynamique discrète provient en fait d’un flot hamiltonien défini dans tout le plan \mathbb{R}^2 : l’application S est alors l’application stroboscopique (au temps 1) de l’hamiltonien quadratique $H_S(q, p) = \alpha q^2 + \beta qp + \gamma p^2$ [75]. Cet hamiltonien est hyperbolique c’est-à-dire qu’il se transforme en $H_{\text{hyperb}} = \lambda PQ$ dans des coordonnées symplectiques adéquates. Il possède donc un unique point fixe instable en l’origine, et ses trajectoires classiques sont des hyperboles.

Si on applique cette dynamique hamiltonienne à une densité ρ dans le plan qui est \mathbb{T}^2 -périodique, à tout moment t la densité image $\rho(t)$ sera périodique vis-à-vis d'un tore déformé. Quand t est entier, ce tore déformé redevient identique à \mathbb{T}^2 , et ρ_t est alors \mathbb{T}^2 -périodique. La transformation stroboscopique agit donc proprement sur les densités ρ sur \mathbb{T}^2 . On a donc obtenu une transformation à temps discret 'très chaotique' en repliant sur le tore une dynamique intégrable hyperbolique dans le plan.

Dans le plan, la transformation S peut être engendrée par une fonction génératrice $A_S(Q, q)$:

$$A_S(Q, q) = \frac{1}{2b}(dQ^2 - 2Qq + aq^2) \quad (3.44)$$

(comme S est hyperbolique et unimodulaire, on a forcément $b \neq 0$). Sur le tore, cette action classique n'engendre toute la dynamique que si, pour des positions (q, Q) données dans $[0, 1)$, on considère toutes les positions finales $Q, Q+1, \dots, Q+b-1$: chacune donnera lieu à une trajectoire $(q, p) \mapsto (Q, P)$ différente sur \mathbb{T}^2 . La dynamique sur le tore sera donc engendrée par les b fonctions $A_S(Q+j, q)$, $j = 0, \dots, b-1$.

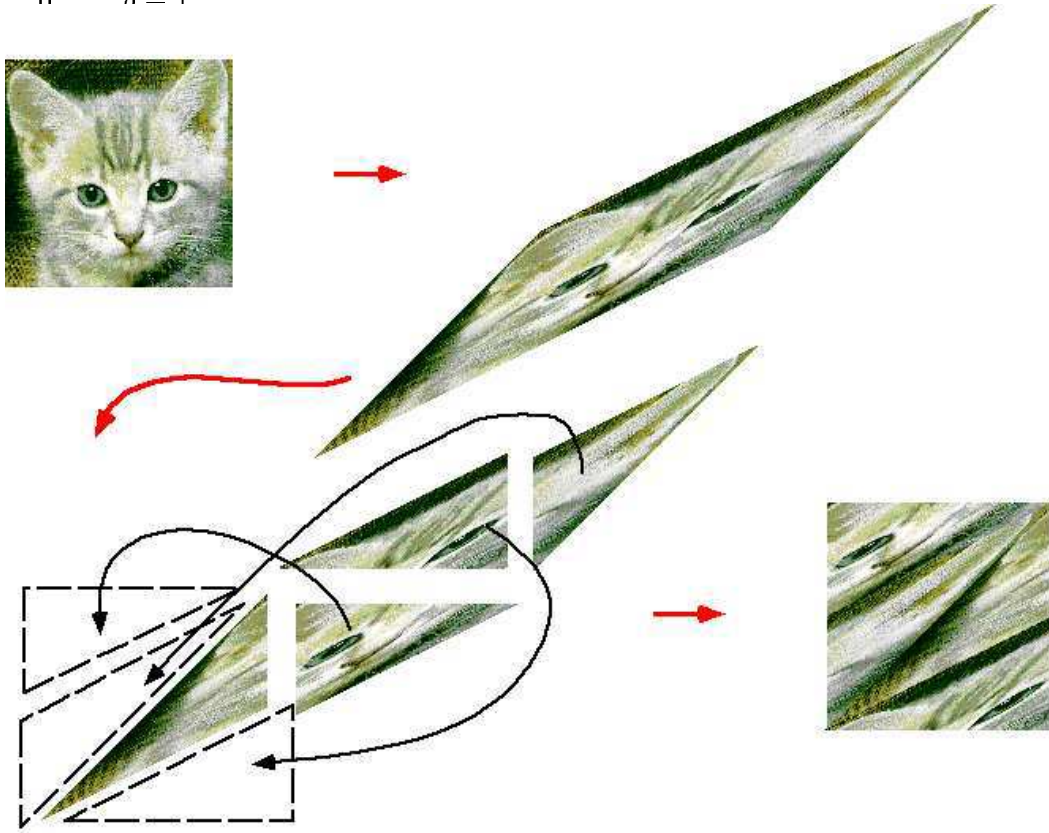


FIG. 3.1 – Transformation du chat S_{fig} , mise en image par Leon “I really have nothing against cats” Poon.

Chat ‘perturbé’

Comme on va le voir dans la suite, toute transformation du chat S a des propriétés arithmétiques très particulières, aussi bien au niveau classique que quantique. Une conséquence importante de ces propriétés concerne la statistique des spectres de U_S , qui est très différente de celle d’un système classiquement chaotique ‘générique’ [76]. On peut dès lors se demander si les vecteurs propres du chat ont des propriétés génériques. Pour s’en convaincre, nous avons (partiellement) étudié une transformation plus générique, qui consiste à perturber l’action génératrice (3.44) du chat par un terme non-linéaire assez petit pour que les propriétés chaotiques soient conservées (les propriétés d’Anosov sont en effet stables par perturbation lisse). Nous avons choisi de perturber l’application S_1 , en reprenant le schéma de [28], c’est-à-dire que le terme supplémentaire à l’action (3.44) vaut $\delta \sin(2\pi q)$. Ceci engendre alors la transformation :

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \mapsto S_1(\delta) \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} S_1 \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} + 2\pi\delta \cos(2\pi q) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{modulo } \mathbb{Z}. \quad (3.45)$$

La transformation a les propriétés d’Anosov tant que $\delta < \delta_{\max}$, avec $\delta_{\max} = \frac{\sqrt{3}-1}{4\pi^2\sqrt{5}} \approx .0083$ [28]. Dans nos applications numériques, nous prenons comme paramètre $\delta = .005$. La transformation obtenue S_δ est alors plus complexe à analyser : en particulier, on ne dispose pas d’expression analytique pour les points périodiques. Pour tout paramètre δ , cette perturbation brise les symétries de parité et de renversement du temps.

Quantification du chat

Pour quantifier les transformations S , on raisonne d’abord dans le plan : l’application stroboscopique de l’hamiltonien H_S donne sur le plan la formule exacte de Van Vleck, du fait de la linéarité de la dynamique :

$$\langle Q | e^{-i\frac{\hat{H}_S}{\hbar}} | q \rangle = \frac{1}{\sqrt{2i\pi b}} e^{\frac{i}{2\hbar b}(dQ^2 - 2qQ + aq^2)}. \quad (3.46)$$

La périodisation de cette expression, qui consiste à remplacer le ket $|q\rangle$ par le $|q_j\rangle_{N,\kappa}$ défini en (3.5), réclame une discussion dépendant des propriétés arithmétiques des entiers a, b, d, N [67]. En règle générale, on trouve que l’opérateur $U_S = e^{-2i\pi N \hat{H}_S}$ envoie chaque distribution de $\mathcal{S}_{N,\kappa}$ dans une distribution de $\mathcal{S}_{N,\kappa'}$, où la relation entre les deux paramètres de Floquet dépend de S et de N (cf [3, éq. 23]). On obtient donc un opérateur d’entrelacement entre ces différents espaces. De plus, si on considère dans les deux espaces les structures hermitiennes définies ci-dessus, cet opérateur d’entrelacement est *unitaire* (une formule presque générale de cet entrelacement se trouve dans [3, éq. 79]).

En particulier, pour tout application classique S on peut toujours trouver un paramètre κ tel que $\kappa' = \kappa$. Dans ce cas, l’opérateur U_S se ramène à une matrice

unitaire sur $\mathcal{H}_{N,\kappa}$. Nous nous placerons toujours dans ces cas-là : on peut alors définir des états propres de U_S , et c'est eux que nous allons étudier, en particulier par leurs représentations de Bargmann. Pour simplifier les calculs, nous ne nous servons que de matrices S de la forme

$$S \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ modulo } 2, \quad (3.47)$$

car les opérateurs correspondants agissent comme des endomorphismes sur $\mathcal{H}_{N,\kappa=0}$ pour tout N . Si, de plus, le coefficient b et N sont premiers entre eux, les matrices unitaires associées sont alors données par une formule simple, très similaire à la formule dans le plan [48] :

$${}_{N,0}\langle q_{j'} | U_S | q_j \rangle_{N,0} = \frac{C_N}{\sqrt{iN}} \exp \left\{ \frac{2i\pi}{N} \left[j'^2 (db^{-1}/2) - j'jb^{-1} + j^2 (ab^{-1}/2) \right] \right\}, \quad (3.48)$$

où b^{-1} est un entier inverse de b modulo N , tel que db^{-1} et ab^{-1} soient deux entiers pairs, et C_N est une phase dépendant de S et de N [2, appendice A].

Quantification du chat perturbé

La perturbation du chat que nous avons utilisée (directement au niveau de la fonction génératrice) permet d'étendre le schéma de quantification décrit ci-dessus aux applications perturbées [28]. En effet, on peut quantifier la transformation $S_1(\delta)$ agissant dans le plan, par la formule de Van Vleck :

$$\langle Q | U_{S_1(\delta)} | q \rangle = \frac{1}{\sqrt{2i\pi b}} e^{\frac{i}{2\hbar b} (dQ^2 - 2qQ + aq^2)} e^{i\delta \sin(2\pi q)/\hbar}. \quad (3.49)$$

La périodisation du propagateur ci-dessus n'a aucune influence sur le dernier facteur, qui est invariant par $q \mapsto q+1$. On aboutit donc aux mêmes restrictions sur le paramètre de Floquet que dans le cas non-perturbé, et on obtient les matrices suivantes dans $\mathcal{H}_{N,0}$:

$${}_{N,0}\langle q_{j'} | U_{S(\delta)} | q_j \rangle_{N,0} = \frac{C_N}{\sqrt{iN}} e^{\frac{2i\pi}{N} [j'^2 (db^{-1}/2) - j'jb^{-1} + j^2 (ab^{-1}/2)]} e^{2i\pi N \delta \sin(2\pi q_j)}. \quad (3.50)$$

L'unitarité de ces matrices découle simplement de celle de U_S , puisque le facteur exponentiel de droite correspond uniquement à un changement de phase des vecteurs $|q_j\rangle_{N,0}$. Les états propres de $U_{S_1(\delta)}$ ne seront ni invariants par parité, ni réels, contrairement à ceux de U_{S_1} .

3.4 États propres cristallins des chats quantifiés

Au lieu de calculer la quantification de S en représentation de Schrödinger, comme on l'a fait ci-dessus, on peut le faire directement en représentation de Bargmann, où les distributions sont remplacées par des fonctions entières. L'action de

U_S sur l'état $|q_j\rangle_{N,\kappa}$ de fonction de Bargmann (3.9) débouche, par périodisation directe de $\langle z|U_S|q_j\rangle$, sur :

$$\begin{aligned} \langle z|U_S|q_j\rangle_{N,\kappa} &= \langle z|U_S|q_j\rangle \theta_3\left(\pi N \left[\frac{ai+c}{bi+d}q_j - i\sqrt{2}\frac{z}{ib+d} + \frac{\kappa_1}{N}\right] \middle| \frac{ai+c}{bi+d}N\right), \\ \text{où } \langle z|U_S|q\rangle &= \frac{1}{(\pi\hbar)^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{ib+d}} \exp\left\{\frac{-(d-ib)z^2 - (a-ic)q^2 + 2\sqrt{2}zq}{2\hbar(ib+d)}\right\}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Autrement dit, on trouve que U_S agit sur les fonctions $\langle z|q_j\rangle_{N,\kappa}$ par l'action usuelle du groupe métaplectique sur les fonctions thêta (ce groupe est le double revêtement du groupe symplectique $\text{SL}(2, \mathbb{R})$, obtenu en fixant le signe de la racine carrée apparaissant dans (3.48)). Ce qui importe, c'est que cette action est linéaire sur la variable de Bargmann z , et qu'elle transforme le paramètre τ par l'action usuelle de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$: $\tau' = \frac{a\tau+c}{b\tau+d}$. Comme S a des coefficients entiers, τ' et τ définissent le même tore, et la fonction $\langle z|U_S|q_j\rangle$ appartient bien à un espace $\mathcal{F}_{N,\kappa'}$.

Cette remarque va nous permettre de construire une classe très particulière d'états propres de U_S dans certains espaces $\mathcal{H}_{N,\kappa}$, qui ont des propriétés non-triviales de périodicité dans l'espace des phases : ce sont les états *cristallins*, pour lesquels les densités de Husimi, et donc également les constellations, sont périodiques non seulement par rapport à \mathbb{T}^2 (c'est le cas de tout état de $\mathcal{H}_{N,\kappa}$), mais aussi par rapport à un sous-réseau de \mathbb{T}^2 . La construction détaillée de ces états est faite dans [2] ; comme elle est assez technique, nous n'en reproduisons ici que les grandes lignes. Ces états servent de référence par rapport à des états propres plus 'désordonnés' du chat, et à ceux du boulanger. En effet, on trouve parmi les états cristallins des états 'très ergodiques', comme nous le verrons dans la section 4.2.1.

La construction de ces états utilise les propriétés des fonctions thêta apparaissant dans les équations (3.9, 3.51), combinées avec factorisation des fonctions de Bargmann sur le tore (3.14) : on observe en effet une dynamique très particulière des constellations de zéros sous les transformations quantiques du chat.

3.4.1 Construction des états propres

Pour commencer, décrivons les fonction de Bargmann associées aux états $|q_j\rangle_{N,\kappa}$ et $U_S|q_j\rangle_{N,\kappa}$ (v. fig. 3.2). Ces fonctions de Bargmann sont quasi-périodiques vis-à-vis de *réseaux* plus fins que $T_{\mathbb{C}}$: outre les deux relations (3.11), on a en plus

$$\begin{aligned} \langle z + i/N\sqrt{2}|q_j\rangle_{N,\kappa} &= e^{2i\pi q_j} e^{\pi(1/2N - i\sqrt{2}z)} \langle z|q_j\rangle_{N,\kappa} \\ \langle z + \frac{-b+id}{N\sqrt{2}}|U_S|q_j\rangle_{N,\kappa} &= e^{2i\pi q_j} e^{\frac{\pi(b^2+d^2)}{2N}} e^{-\pi(b+id)\sqrt{2}z} \langle z|U_S|q_j\rangle_{N,\kappa}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

En particulier, on voit que les zéros de ces deux fonctions sont distribués le long de ‘lignes discrètes’ sur le tore (v. fig. 3.2) : les zéros de $\langle z|q_j\rangle_{N,\kappa}$ sont donnés par

$$\sqrt{2} z_l = (q_j + 1/2) + i \frac{1}{N} (1/2 + l - \kappa_1) \mod \mathbb{T}^2, \quad l = 1, \dots, N, \quad (3.53)$$

tandis que ceux de $\langle z|U_S|q_j\rangle_{N,\kappa}$ peuvent être déduits des précédents par la simple formule :

$$\begin{aligned} z'_l &= \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} z_l \mod T_{\mathbb{C}} \\ \iff \bar{z}'_l &= S \bar{z}_l \mod T_{\mathbb{C}} \end{aligned} \quad (3.54)$$

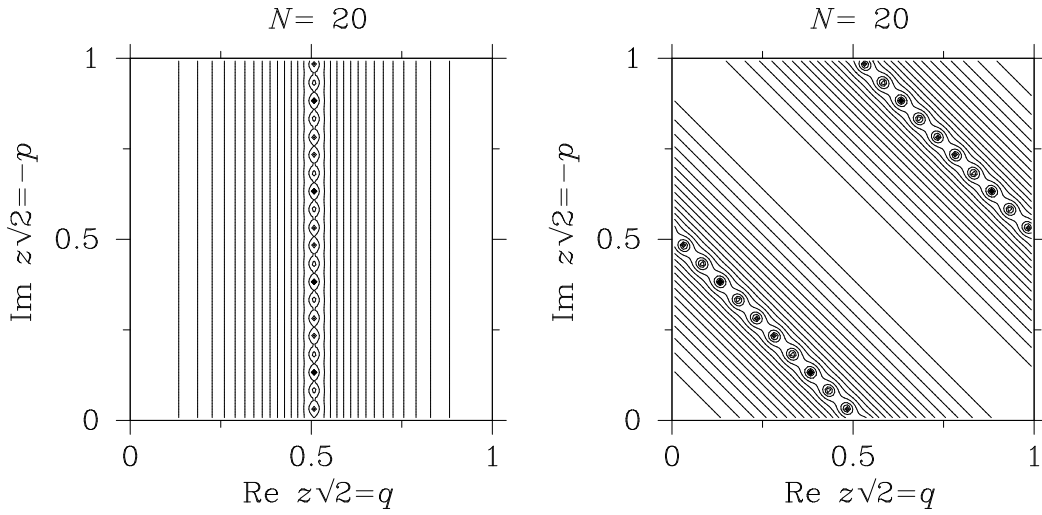


FIG. 3.2 – Transformation classique d’une constellation. L’état de gauche est $|q_0\rangle_{20,0}$, c’est-à-dire un état localisé en la position $q = q_0 = 0$. À droite, son image par $U_{S_{\text{fig}}}$. Les contours indiquent le logarithme de la densité de Husimi, pour faire ressortir les zéros.

Autrement dit, les zéros de la fonction image se déduisent de ceux de l’antécédent par la transformation du chat classique. Ce n’est pas le cas pour un état initial générique de $\mathcal{H}_{N,\kappa}$. On peut d’ailleurs écrire les équations de mouvement des zéros lorsque le propagateur $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t}$ agit sur un état initial dans $\mathcal{H}_{N,\kappa}$ (cf. les remarques de la conclusion générale) : ces équations sont très non-linéaires, mais il se produit des annulations ‘miraculeuses’ lorsque l’état initial est de la forme de $|q_j\rangle_{N,\kappa}$, ce qui implique la propriété suivante :

Proposition 1 *Le mouvement des zéros de $\psi(z)$ lorsqu’on applique à $\psi \in \mathcal{H}_{N,\kappa}$ une application quantique du chat U_S est classique si et seulement si $\psi(z)$ peut s’écrire sous la forme d’une unique fonction thêta (à un facteur exponentiel près) :*

$$\psi(z) = \langle z|\psi\rangle_{N,\kappa} = e^{a_2 z^2 + a_1 z + a_0} \theta_3(\alpha z + \beta|\tau). \quad (3.55)$$

C'est bien entendu le cas de $|q_j\rangle_{N,\kappa}$ (cf. éq (3.9)), mais également vrai de son image $U_S|q_j\rangle_{N,\kappa}$. Si on agit sur cette dernière par l'action d'un autre opérateur $U_{S'}$, les zéros vont encore se déplacer classiquement. Remarquons que cette propriété ne dépend pas de l'angle de Floquet initial : elle reste vraie même si les vecteurs $|\psi\rangle$ et $U_S|\psi\rangle$ sont dans des espaces $\mathcal{H}_{N,\kappa}$ différents.

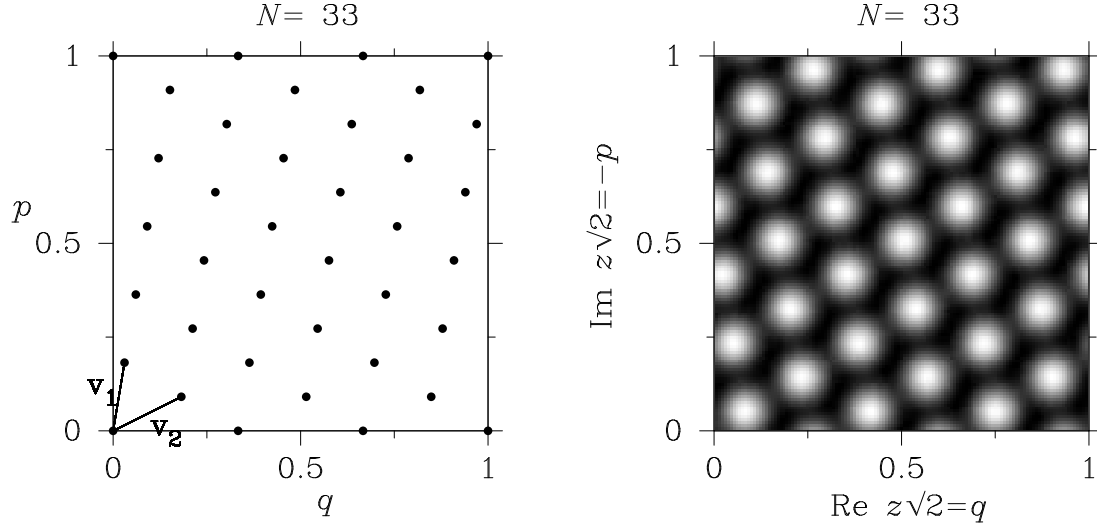


FIG. 3.3 – À gauche, un réseau invariant classiquement par S_1 , pour $N = 33$. Ce réseau a comme base minimale $v_1 = (1, 6)$, $v_2 = (6, 3)$ modulo N . À droite, l'état propre de U_{S_1} correspondant au même réseau, après translation de $(1/2, 1/2)$ et réflexion par rapport à l'axe réel. Les nuances de gris correspondent aux valeurs de H_ψ , les points blancs correspondant aux zéros.

3.4.2 Réseaux invariants

Décrivons plus précisément les réseaux de zéros qu'on obtient de la sorte, c'est-à-dire en faisant agir les transformations de chat quantiques U_S sur les états de base $|q_j\rangle_{N,\kappa}$. Les N zéros peuvent toujours être écrits de la sorte :

$$z'_l = z'_o + l(n + im)/N\sqrt{2}, \quad \text{pour } l = 1, \dots, N, \quad (3.56)$$

où les entiers n, m sont premiers entre eux, de manière à avoir N points distincts sur $T_{\mathbb{C}}$. En prenant $z'_o = 0$ et en dilatant le réseau d'un facteur $N\sqrt{2}$, et en prenant son symétrique par rapport à l'axe réel, on débouche sur un sous-réseau entier du tore carré de côté N , autrement dit un sous-module libre de type 1 \mathbb{Z}_N^2 , où \mathbb{Z}_N est l'anneau des entiers modulo N [82, p.81–84]. La qualification 'de type 1'

signifie que le réseau est engendré par un unique vecteur dans \mathbb{Z}_N^2 , qui est ici le vecteur (n, m) ; le module est ‘libre’ s’il contient N points distincts sur \mathbb{Z}_N^2 . Si on appelle ψ_Λ l’état quantique associé à ce sous-module Λ (c’est-à-dire tel que les conjugués complexes des zéros se placent sur $\Lambda/N\sqrt{2}$), l’équation (3.54) montre que l’action quantique de U_S sur ψ_Λ se traduit par l’action classique de S sur Λ .

La propriété de factorisation (3.14) montre que la relation $\Lambda \leftrightarrow |\psi_\Lambda\rangle_{N,\kappa}$ est injective : à tout sous-module Λ correspond un unique état ψ_Λ , qui appartient à un certain espace $\mathcal{H}_{N,\kappa}$, dépendant de la somme (3.12). Par conséquent, si, pour une certaine transformation S , on trouve un sous-module Λ tel que $S\Lambda = \Lambda$, cela signifie que l’état ψ_Λ est un état propre de U_S (et donc que U_S agit comme un endomorphisme sur l’espace $\mathcal{H}_{N,\kappa}$ qui contient ψ_Λ). On peut donc construire des familles d’états propres de U_S par l’étude purement classique des sous-modules de \mathbb{Z}_N^2 invariants par S .

Cette étude est faite en détail dans [2, section 5], et elle montre le caractère profondément arithmétique de la transformation du chat. Les sous-réseaux invariants n’existent en effet pas pour toutes les valeurs de N . Le paramètre crucial dans cette étude est le discriminant de la matrice S , défini par $D = \frac{a+d}{2} - 1$ (c’est un entier, car nous nous restreignons aux matrices S du type (3.47)). Nous ne donnerons ici que les résultats concernant des entiers N premiers, car nos études numériques ultérieures ont été faites exclusivement avec ces valeurs (le cas général est traité dans [2]). Dans ce cas, tout sous-module Λ peut être engendré sur \mathbb{Z}_N^2 par un vecteur du type

$$\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} k' \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

L’invariance de Λ par la transformation S prend alors la forme d’une des deux équations :

$$\begin{aligned} b k^2 + (a - d)k - c &= 0 \pmod{N} \\ (\text{resp.}) \quad c k'^2 + (d - a)k' - b &= 0 \pmod{N}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

En général, résoudre ces équations revient à extraire une racine carrée de D dans \mathbb{Z}_N , c’est-à-dire trouver un entier x_N tel que $x_N^2 \equiv D \pmod{N}$. C’est évident si N divise D , auquel cas il suffit de prendre $x_N = 0$. Hormis ce cas trivial (qui ne concerne qu’un nombre fini de valeurs de N), les entiers premiers se partagent en deux classes : les nombres premiers N qui sont *scindés* par rapport à D , pour lesquels il existe deux solutions $\pm x_N$; les nombres premiers pour lesquels il n’y a aucune solution (qui sont dits *inertes*).

Si N est un nombre premier scindé par rapport à D , il existe donc deux sous-modules (différents) Λ_\pm invariants par S ; autrement dit, il existe deux états propres ψ_{Λ_\pm} de U_S ayant leurs constellations sur un réseau. Pour cette valeur de N , ce sont les seuls; de plus, ils ne sont pas orthogonaux, mais appartiennent à un même sous-espace propre de U_S sur $\mathcal{H}_{N,\kappa}$ de dimension au moins 2. Des ‘états propres sur réseau’ peuvent également apparaître pour des valeurs de N

non premières, mais quand il y en a, ils sont très peu nombreux parmi tous les états propres de U_S (en particulier, ils ne forment jamais une famille complète de $\mathcal{H}_{N,\kappa}$). Dans la limite $N \rightarrow \infty$, il constituent certainement un ensemble de densité asymptotique nulle [2, §5.2].

Construction des autres états propres : propriétés cycliques de U_S

Pour les valeurs de N décrites plus haut, on peut en fait construire tous les états propres à partir d'un des réseaux Λ_{\pm} . En effet, si on considère l'ensemble des réseaux *affines* (c'est-à-dire ne passant pas par l'origine) $\{\Lambda_i = \Lambda + \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, N-1\}$ déduits de Λ par translations verticales, il est clair, par linéarité, que ces réseaux Λ_i sont envoyés les uns sur les autres par S . En appliquant S itérativement à Λ_1 , on obtient ainsi un cycle $(\Lambda_1, S\Lambda_1, S^2\Lambda_1, \dots, S^p\Lambda_1 = \Lambda_1)$ de période p . Ces propriétés cycliques se transposent directement au niveau quantique. Les vecteurs ψ_{Λ_i} forment avec ψ_{Λ} une *base orthonormée* de $\mathcal{H}_{N,\kappa}$, sur lesquels le propagateur quantique U_S agit par permutation (à des phases près). À partir du cycle $\{\psi_{\Lambda_1}, U_S\psi_{\Lambda_1}, \dots\}$, on peut aisément fabriquer p états propres orthonormés (éq (60) de [2]), dont les valeurs propres sont $e^{2i\pi(r+\sigma)/p}$, $r = 0, \dots, p-1$. Si la période $p < N-1$, on recommence le processus à partir d'un réseau Λ_i qui n'a pas encore été compté, et ainsi de suite. On obtient finalement une base orthonormée d'états propres de U_S .

Si on n'a plus qu'un cycle (c'est-à-dire si $p < N-1$), toutes les phases propres de U_S sont en général dégénérées. C'est une des raisons pour lesquelles le spectre de U_S ne présente pas des corrélations identiques à celles des matrices aléatoires, mais au contraire une statistique poissonienne. Comme on voudrait décrire des états propres les plus 'génériques' possibles sur le plan du chaos quantique en général, on cherche plutôt des états non dégénérés. Pour cette raison, nos études numériques seront faites pour des valeurs de N scindées, et telles que la période du cycle ci-dessus soit $p = N-1$. Il n'y a alors qu'une seule phase propre deux fois dégénérée, celle qui correspond aussi à l'état ψ_{Λ} . Ces valeurs de N forment un ensemble infini $\{N_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, donc peuvent se prêter à une analyse semi-classique. Cet ensemble de valeurs pour la constante de Planck est intéressant pour une autre raison : on sait que la propriété de Schnirelman s'applique à *toute suite* de fonctions propres $\{\psi_{N_k}\}$ de U_S , dans la limite $N_k \rightarrow \infty$ [48] : c'est un théorème d'ergodicité quantique unique pour ces valeurs (cf section 4.3).

Signalons qu'il existe des valeurs de N pour lesquelles aucune phase propre n'est dégénérée [48], mais on ne sait pas si toutes les suites de fonctions propres s'équidistribuent dans ce cas.

États propres associés à un réseau carré

Il existe d'autres états ψ dans $\mathcal{H}_{N,\kappa}$ dont les fonctions de Bargmann s'écrivent comme indiqué dans la proposition ci-dessus, et qui ne peuvent être obtenus à

partir de $|q_j\rangle_{N,\kappa}$. Par exemple, citons l'état ψ dont la constellation forme un réseau carré sur le tore (ce n'est bien sûr possible que si $N = M^2$, avec M entier). Cet état peut s'écrire sous la forme

$$\langle z|\psi_{\text{sq}}\rangle_{N,\kappa} \stackrel{\text{def}}{=} \chi(Mz) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{\mu=0}^{M-1} (-1)^\mu \left| \frac{\mu + 1/2}{M} \right\rangle_{N,\kappa}, \quad (3.59)$$

où la valeur de κ dépend de la parité de N : $\kappa = 0$ si N est pair, $\kappa = \hat{0}$ si N est impair. La définition de ψ_{sq} montre bien que ses zéros sont sur le réseau carré de côté $(M\sqrt{2})^{-1}$ (le sous-réseau correspondant de \mathbb{Z}^2 est un sous-module de type 2, contrairement à ceux considérés jusqu'à présent).

Par linéarité, l'opérateur U_S agit sur ψ_{sq} comme sur l'état unique $|1/2\rangle_{1,\hat{0}}$ de $\mathcal{H}_{1,\hat{0}}$ dont la fonction de Bargmann est $\chi(z)$ (éq. (3.13)), autrement en multipliant ψ_{sq} par une simple phase. ψ_{sq} est donc un état propre de U_S dans $\mathcal{H}_{N,\kappa}$.

Ce type d'état propre est encore plus rare que les états ψ_Λ décrits plus haut, puisque la valeur de N est contrainte à être un carré parfait. Nous l'avons mentionné car il est état propre de *tous* les opérateurs U_S , du moment que S vérifie une des deux conditions (3.47) : c'est une sorte d'état propre universel, qui de plus a des propriétés d'équidistribution presque optimales (v. sections 4.2.1 et 4.5).

3.4.3 Propriétés ergodiques des réseaux invariants

Nous décrivons dans cette section la manière dont les réseaux Λ invariants par une transformation S se répartissent sur le tore. En effet, un réseau de N points sur \mathbb{T}^2 peut être localisé le long d'une ligne, comme c'est le cas par exemple pour les zéros des états $|q_j\rangle_{N,\kappa}$, ou au contraire délocalisé sur tout le tore, comme par exemple les réseaux carrés décrits ci-dessus.

Une manière quantitative de mesurer le caractère (dé)localisé d'un réseau bidimensionnel sur \mathbb{T}^2 consiste à calculer les générateurs *les plus courts* de ce réseau, c'est-à-dire deux vecteurs V_1, V_2 tels que, d'une part, $\Lambda = \{nV_1 + mV_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$, d'autre part, tout vecteur $V \in \Lambda$ strictement plus court que V_1 est nul, et tout vecteur V strictement plus court que V_2 est soit $\pm V_1$, soit nul. Une telle 'base minimale' de Λ existe toujours à deux dimensions [41], elle détermine en particulier la forme de la cellule de Dirichlet–Voronoi du réseau (c'est-à-dire la cellule constituée des points plus proches de l'origine que de tous les autres points de Λ). Par une contraction de Λ d'un facteur $1/N$, on se ramène au réseau de zéros sur \mathbb{T}^2 . On a alors [3, appendice B] :

Proposition 2 *Pour une transformation du chat S donnée, il existe une constante C_S telle que, pour tout réseau de points sur \mathbb{T}^2 invariant par S , les générateurs minimaux v_1, v_2 sont bornés par $\frac{1}{C_S\sqrt{N}} \leq |v_i| \leq \frac{C_S}{\sqrt{N}}$.*

Par conséquent, la cellule de Voronoi de la constellation est de diamètre $O(1/\sqrt{N})$; cette borne est optimale, puisque l'aire de la cellule est forcément $1/N$,

quelque soit le type de réseau. Cette borne est trivialement violée pour les réseaux le long de lignes verticales : les générateurs sont dans ce cas $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/N \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et la cellule de Voronoi a un diamètre de l'ordre de 1. La proposition ci-dessus constitue une propriété d'équidistribution pour les réseaux invariants, et est utile pour estimer les différentes normes utilisées pour mesurer l'ergodicité des fonctions de Husimi sur réseau (v. section 4.2.1).

Cette ergodicité est également visible par transformée de Fourier de la constellation (cf. section 4.6.1). Pour un vecteur d'onde fixé $k = (k_q, k_p)$, le coefficient $\rho_k = N^{-1} \sum_{l=1}^N e^{-2i\pi k \cdot x_l}$ associé à une constellation sous forme d'un réseau classiquement invariant par S sera *rigoureusement nul* si $N \geq Q_S k^2$, où Q_S est une constante dépendant de la transformation S . Ceci permet de montrer que les mesures atomiques associées à ces réseaux invariants Λ sont équidistribuées dans la limite $N \rightarrow \infty$ [2, section 6].

3.4.4 États cristallins

On a déjà évoqué la rareté des états propres sur réseau. Il est cependant possible de construire des états propres plus généraux, ayant des propriétés de périodicité analogues aux états sur réseaux : il s'agit des états dits *cristallins*, pour lesquels la constellation (et la fonction de Husimi) est aussi périodique vis-à-vis d'un sous-réseau de \mathbb{T}^2 invariant par S , mais chaque 'cellule' de ce réseau peut contenir un nombre fini de zéros, dont les positions à l'intérieur de la cellule sont a priori arbitraires : l'analogie avec un cristal bidimensionnel est claire. Nous ne détaillerons pas plus ici la construction de ces états propres ; elle est faite dans la section 8 de [2], et est également basée sur l'action classique de S sur certains sous-réseaux de \mathbb{T}^2 . Un état cristallin de fonction de Husimi invariante par rapport à Λ jouit alors des mêmes propriétés d'équidistribution que l'état sur réseau associé à Λ .

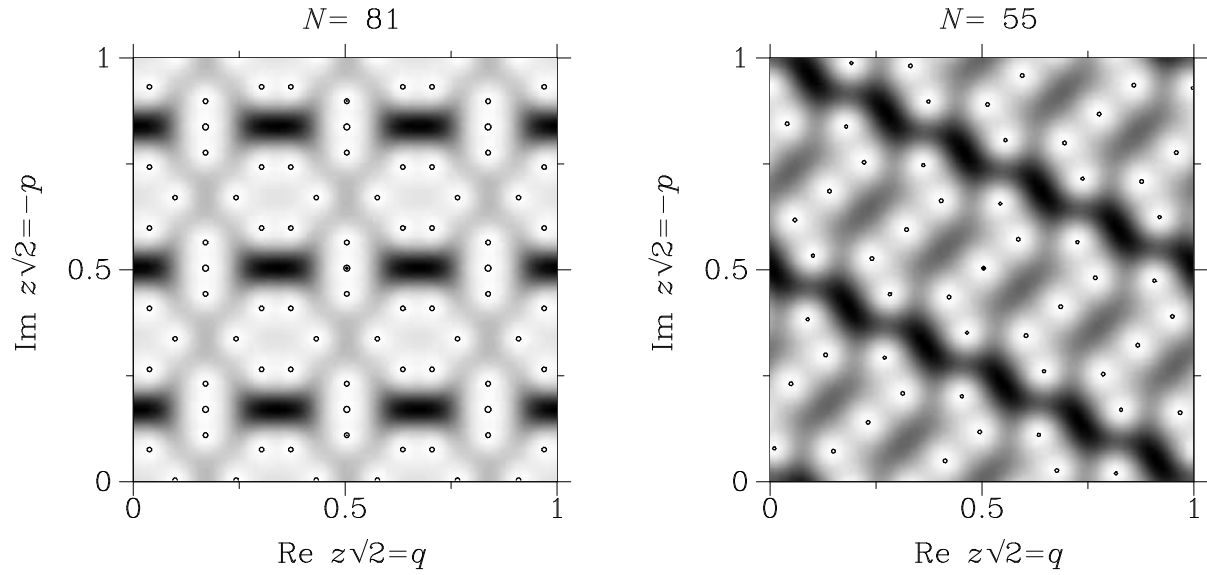


FIG. 3.4 – Deux états propres cristallins de U_{S_1} . Les nuances de gris représentent les valeurs de la fonction de Husimi. Les zéros sont indiqués par des cercles. À gauche, le cristal est périodique par rapport au réseau carré d'ordre 9. À droite, par rapport à un réseau invariant d'ordre 11 contenu dans celui de la figure 3.3.

Chapitre 4

Fluctuations des états propres chaotiques

4.1 Objectifs

Les objectifs de ce chapitre peuvent être résumés ainsi : on sait que les densités de Husimi d'états propres chaotiques convergent vers 1 au sens faible, dans la limite semi-classique (c'est la 'propriété de Schnirelman', cf. section 4.3). Ceci constitue en général la seule information rigoureuse dont on dispose sur ces densités microlocales. Nous voudrions cerner plus précisément la structure de ces densités, en particulier mesurer quantitativement leurs fluctuations par rapport à la limite classique. Pour ce faire, nous allons utiliser plusieurs types de 'normes' mesurant l'ampleur des fluctuations de densité des H_ψ (les guillemets signifient que ces quantités ne sont pas toujours des normes au sens mathématique), ainsi qu'un ensemble de 'fonctions de Husimi de référence', c'est-à-dire des fonctions de Husimi connues explicitement, et caractérisées par des propriétés d'ergodicité, ou au contraire de localisation sur le tore. Nous chercherons à estimer ces fluctuations d'une part directement sur les H_ψ , d'autre part sur les constellations ρ_ψ des états propres chaotiques ; la charnière entre les deux représentations est la fonction $\log H_\psi$: son utilisation nous conduira d'une part à des résultats dynamiques sur les densités de zéros, d'autre part vers une conjecture liant ses coefficients de Fourier aux pics de densité visibles sur certains états propres (typiquement, ces pics sont des cicatrices de points périodiques instables). Nous commençons par décrire les différentes familles d'états de référence.

4.2 États de référence

Pour situer un peu les états propres ergodiques dans $\mathcal{H}_{N,\kappa}$, il est nécessaire d'avoir le maximum de 'repères' dans cet espace, qu'on représente par ses fonctions de Husimi. Nous donnons donc une liste d'états connus analytiquement,

et intéressants pour leurs propriétés semi-classiques dans l'espace des phases (ils seront soit très ergodiques, soit très localisés). On pourra alors comparer les différentes 'normes' de ces états de référence à celles des états propres chaotiques, obtenues numériquement. On en a représenté 6, de différents types, sur la figure 4.1

4.2.1 États ergodiques

Comme une fonction de Husimi ne peut être rigoureusement plate, un problème (apparemment non-trivial) consiste à trouver l'état de $\mathcal{H}_{N,\kappa}$ le plus ergodique, relativement à une 'norme' donnée (par exemple, pour la norme sup), autrement dit l'état qui minimise cette norme parmi tous les états normalisés de $\mathcal{H}_{N,\kappa}$. Il n'existe pas de réponse définitive à ces différents problèmes d'optimisation. On a en revanche des résultats partiels : on sait minimiser certaines de ces 'normes' sur un ensemble d'états plus restreint que $\mathcal{H}_{N,\kappa}$ tout entier.

États sur réseau

Il est difficile d'avoir une idée de l'état le plus ergodique appartenant à un espace $\mathcal{H}_{N,\kappa}$ donné. Tout d'abord, on peut restreindre le problème à $\kappa = 0$, puisque les 'normes' sont invariantes par translation. Elles sont également invariantes par dilatation de la variable x : chacune de ces normes prendra la même valeur pour les fonctions $H(x)$ et $H(Mx)$, donc leurs valeurs minimales sur $\mathcal{H}_{N,0}$ seront supérieures ou égales à celles prises sur $\mathcal{H}_{NM^2,0}$. Il est donc plus naturel d'étudier ces problèmes d'optimisation sur l'ensemble des espaces $\mathcal{H}_{N,0}$, où $N \in \mathbb{N}$. On peut alors émettre une conjecture provenant de l'analogie entre ces optimisations et le problème d'empilement optimal de disques dans le plan.

Conjecture 1 *Quelle que soit la 'norme' utilisée pour mesurer les fluctuations de H_ψ , celle-ci est minimale lorsque les zéros de H_ψ forment un réseau triangulaire équilatéral.*

Quelle que soit la taille de sa maille, un réseau équilatéral ne peut constituer un sous-réseau du tore, à cause de l'irrationalité de $\sqrt{3}$. Néanmoins, dans la limite $N \rightarrow \infty$, on peut en construire des approximations de plus en plus justes, c'est-à-dire des réseaux triangulaires pour lesquels les angles se rapprochent de $\pi/3$ (par exemple, pour $N = 56$, on peut construire un réseau triangulaire isocèle dont les rapports des longueurs entre les côtés et la base d'un triangle est ≈ 1.0077 , voir fig. 4.1). Les valeurs minimales des 'normes' sont donc atteintes dans la limite $N \rightarrow \infty$.

Nous avons pu prouver que les fonctions de Husimi à réseau équilatéral optimisent les normes L^2 et la moyenne géométrique si on restreint l'espace des états aux états sur réseau [3, appendice A]. La conjecture affirme donc que les états les

plus ergodiques sont à chercher parmi les états sur réseau. Cela semble raisonnable : des problèmes similaires de minimisation des déterminants de laplaciens par rapport à toutes les structures riemanniennes sur le tore aboutissent à cette conclusion [100].

La preuve de ce résultat partiel utilise le calcul explicite de ces ‘normes’ dans le cas des états sur réseau, qu’ils soient ou non états propres d’un opérateur U_S (cf. section 3.4). Tout état sur réseau peut en effet s’exprimer très simplement en représentation de Bargmann : si (v_1, v_2) sont des générateurs du réseau dans $T_{\mathbb{C}}$ (ordonnés pour que $\Im(v_2/v_1) > 0$), les fonctions de Bargmann et de Husimi de l’état ψ correspondant s’écrivent, à une dilatation près, comme des ‘briques élémentaires τ -déformées’ [3, section 4.4] :

$$\begin{aligned}\chi(z \mid \tau) &= (2\Im(\tau))^{1/4} e^{\frac{\pi z^2}{\Im(\tau)}} \theta_1(\pi\sqrt{2}z \mid \tau), \\ H_{\chi(\tau)}(q, p) &= \sqrt{2\Im(\tau)} e^{\frac{-2\pi p^2}{\Im(\tau)}} \left| \theta_1(\pi(q - ip) \mid \tau) \right|^2,\end{aligned}\tag{4.1}$$

où le paramètre de déformation $\tau = \frac{v_2}{v_1}$ est invariant modulaire, c’est-à-dire que les paramètres τ et $\tau' = \frac{a\tau+c}{b\tau+d}$ donnent des fonctions équivalentes (pour le réseau carré $\tau = i$, on retrouve la brique élémentaire usuelle $\chi(z)$, $H_{\chi}(x)$). À partir de ces formules, on peut extraire assez explicitement les ‘normes’ de ces états, qui sont égales aux normes de $H_{\chi(\tau)}$. On trouve alors des expressions reliées aux problèmes de déterminants de laplaciens cités un peu plus haut (nous n’avons pas trouvé de jonction plus directe entre les deux types de problèmes).

Pour aller dans le sens de la conjecture ci-dessus, nous signalons que tous les états propres du chat (perturbé) et du boulanger que nous avons calculés numériquement sont moins ergodiques (au sens des diverses ‘normes’) que le réseau équilatéral (v. fig. 4.5) ; de plus, parmi les états propres du chat, les plus ergodiques sont souvent les états sur réseau, lorsqu’ils existent (c’est le cas pour les valeurs de N que nous avons considérées). Par conséquent, il est nécessaire d’utiliser une autre approche pour mieux décrire les états propres génériques des applications chaotiques : celle des états aléatoires.

États aléatoires

Les états propres des transformations quantiques étudiées présentent en général des fluctuations relativement importantes (par rapport à celles du réseau équilatéral, ou carré), tout en restant globalement délocalisés sur \mathbb{T}^2 ; d’autre part, il semble difficile d’établir des corrélations entre deux états propres distincts, au vu de leurs fonctions de Husimi. Par conséquent, une approche statistique semble raisonnable pour décrire ces états propres. En effet, la dynamique classique ne privilégie aucune région de l’espace des phases. Or, les ensembles de vecteurs aléatoires que nous allons considérer seront invariants par translation sur \mathbb{T}^2 , dans la limite $N \rightarrow \infty$.

On va voir qu'un état aléatoire typique ne peut être que 'faiblement localisé' (en particulier beaucoup moins que les états définis au paragraphe suivant). Néanmoins, il présente des fluctuations nettement plus prononcées que les états sur réseau ; autrement dit, ceux-ci sont très atypiques dans l'espace $\mathcal{H}_{N,\kappa}$.

Enfin, les états aléatoires apparaissent naturellement comme les états propres de matrices unitaires aléatoires (dans les ensembles CUE ou COE, selon la symétrie). Or on sait que dans la limite $N \rightarrow \infty$, deux états propres distincts sont décorrélés. On retrouve donc l'apparent 'désordre' régnant parmi les états propres chaotiques.

Cette approche statistique remonte à un certain temps [20], mais son application aux représentations de Bargmann–Husimi et surtout stellaire est plus récente [86, 85]. Lorsque l'espace des phases est la sphère, les fonctions de Bargmann sont alors des polynômes de degré $\sim 1/\hbar$ [91]. Les premières études concernant les zéros de polynômes aléatoires remontent aux travaux de Kac [73], et ils ont été développés par la suite pour de multiples applications [26] (les ensembles utiles pour la description des états chaotiques ont été introduits et développés par [66, 31, 107]) ; des ensembles statistiques de fonctions entières plus générales ont été également étudiés [93, 53, 84]. Dans le cas présent, les fonctions sont dans les espaces $\mathcal{F}_{N,\kappa}$, c'est-à-dire qu'on s'intéresse aux combinaisons linéaires aléatoires des fonctions thêta intervenant dans les expressions (3.9). Nous avons vérifié que le comportement local de la densité de zéros est le même que pour les géométries étudiées jusqu'à présent (sphère, plan, plan hyperbolique). Cette universalité des propriétés locales des fonctions de Bargmann aléatoires vis-à-vis de la géométrie a été clairement mise en valeur dans [84].

Symétries

Nous ne donnerons pas ici tous les détails de calcul, ni tous les résultats de ce modèle aléatoire sur le tore. Comme pour les modèles de matrices aléatoires, il est nécessaire de définir les symétries des vecteurs propres qu'on veut étudier. Par exemple, les transformations quantiques du chat (resp. du boulanger) sont invariantes par parité si on choisit un paramètre de Floquet valant $\kappa = 0$ (resp. $\kappa = (1+i)/2$). Cela signifie que toute fonction propre ψ vérifiera $\psi(z) = \pm\psi(-z)$ (pour les applications du chat U_S que nous avons étudiées, les espaces propres 2-dégénérés ne contiennent que des fonctions paires). À cela il faut ajouter une éventuelle symétrie anti-unitaire : les états propres du boulanger sont invariants par transformation de Fourier discrète (rotation de $\pi/2$ dans $T_{\mathbb{C}}$) suivie de la conjugaison complexe : tout état propre peut être normalisé de façon à ce que $\psi(i\bar{z}) = \overline{\psi(z)}$. Pour le chat U_{S_1} , la symétrie anti-unitaire s'écrit $\psi(\bar{z}) = \overline{\psi(z)}$, autrement dit les fonctions de Bargmann sont réelles. On n'a pas de telle symétrie dans le cas de U_{S_2} . Ces équations définissent des axes et points de symétries qui auront des propriétés remarquables vis-à-vis des distributions de zéros. La transformation quantifiée du chat perturbé présentée dans la section 3.3.2 n'a aucune symétrie manifeste. Nous n'avons pas pour l'instant étudié les constellations de

ses états propres, mais nous nous sommes restreints à l'étude des 'normes' de leurs fonctions de Husimi.

Il est donc nécessaire d'étudier différents ensembles de vecteurs aléatoires, présentant ou non les symétries décrites ci-dessus. Notre étude a débuté par des vecteurs aléatoires sans symétrie, définis comme suit :

$$\psi_{\{a\}} = \sum_{j=0}^{N-1} a_j |q_j\rangle_{N,0}, \quad (4.2)$$

et les coefficients a_j sont des variables aléatoires complexes gaussiennes centrées en 0, de variance N^{-1} . Ce modèle est invariant par changement de base ortho-normée : il peut également être défini par la loi de probabilité

$$\mathcal{D}(\psi) \propto \frac{N^N}{(N-1)!} \|\psi\|^{2N-2} e^{-N\|\psi\|^2} \sim \sqrt{\frac{N}{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{N(\|\psi\|^2 - 1)^2}{2} \right\} \quad \text{en } N \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

La norme $\|\psi\|$ de ces états est donc piquée autour de la valeur 1 dans la limite $N \rightarrow \infty$. Notre ensemble sera donc analogue, dans cette limite, à celui d'un vecteur propre normalisé d'une matrice unitaire (resp. hermitienne) aléatoire prises dans les ensembles CUE (resp. GUE) [92], pour lequel $\mathcal{D}_{CUE}(\psi) \propto \delta(\|\psi\|^2 - 1)$: ce modèle correspond géométriquement à un point aléatoire sur la sphère complexe de dimension $N-1$, par rapport à la métrique usuelle. Cette interprétation géométrique est utilisée pour estimer la norme sup moyenne de la fonction H_ψ dans cet ensemble [3, appendice C]. Il est clair que les deux types d'ensembles sont rigoureusement équivalents vis-à-vis des propriétés des zéros de $\psi(z)$. Nous décrirons succinctement dans la section 4.7.1 les méthodes utilisées pour obtenir certaines propriétés statistiques des constellations pour ces modèles (nous nous sommes essentiellement basés sur les travaux de Hannay [66] pour le cas des vecteurs aléatoires complexes et Prosen [107] pour les vecteurs réels).

4.2.2 États localisés

De même que la fonction de Husimi ne peut être rigoureusement plate sur \mathbb{T}^2 , elle n'est pas non plus concentrée en un unique point. Cependant, elle peut d'une certaine manière mieux s'approcher d'une mesure de Dirac que de la mesure ergodique. Pour le voir, il faut au contraire chercher à maximiser les 'normes' sur les espaces $\mathcal{H}_{N,\kappa}$. Dans le plan, on sait que cette maximisation est atteinte pour les états cohérents de Weyl : ils sont les 'plus singuliers' pour les mesures L^r et l'entropie [90]. Il semble raisonnable d'étendre la propriété aux états cohérents du tore, définis dans la section 3.2.3, au moins dans un sens asymptotique. Il y a d'autres manières de construire des états localisés en un point z_1 que par la projection de $|z_1\rangle$ sur $\mathcal{H}_{N,\kappa}$: par exemple, on peut considérer les états $|\psi_{\hat{z}_1}\rangle_N$ dont les N zéros de Bargmann sont au même point $\hat{z}_1 \stackrel{\text{def}}{=} z_1 + (1+i)/2\sqrt{2}$ (v. fig. 4.1).

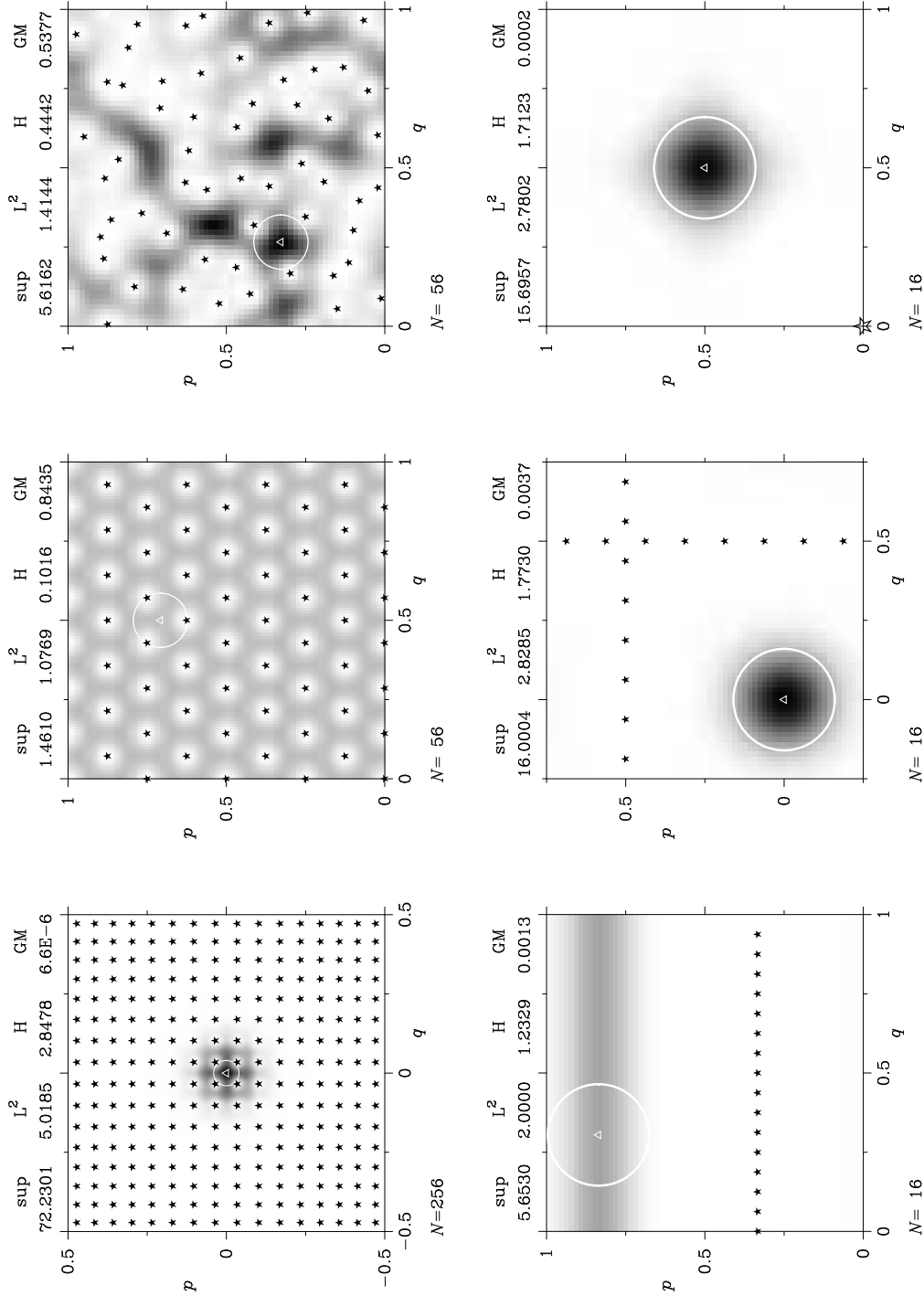


FIG. 4.1 – 6 états de référence. À gauche, de haut en bas : un état aléatoire complexe sans parité ; un état sur réseau presque équilatéral (le rapport des côtés vaut ≈ 1.0077) ; un état à réseau carré déformé, de paramètre $\lambda \approx 0.016$. À droite, de haut en bas : un état complètement dégénéré, ayant un zéro d'ordre 16 en l'origine ; l'état cohérent en l'origine (la distribution des zéros montre bien la factorisation de la fonction de Bargmann en deux fonctions θ (3.31) ; une onde plane.

Un tel état ressemble fort à l'état cohérent $|z_1\rangle_{N,\kappa}$, au moins asymptotiquement dans un voisinage de z_1 : sa fonction de Husimi sera aussi en $N e^{-\pi N(x-x_1)^2}$ près de x_1 ; il aura donc asymptotiquement les mêmes ‘normes’ que $|z_1\rangle_{N,\kappa}$ (sa moyenne géométrique est même plus singulière que celle de $|z_1\rangle_{N,\kappa}$). Par contre, l'état $|\psi_{z_1}\rangle_N$ sera forcément dans l'espace $\mathcal{H}_{N,\kappa(z_1)}$ dont le paramètre de Floquet est donné par (3.12), tandis qu'il existe un état cohérent en z_1 pour tout κ . Ces états (dits ‘dégénérés’) sont tout de même remarquables par la singularité de leur représentation stellaire.

Les états propres d'hamiltoniens à des énergies non critiques (l'état cohérent $|0\rangle$ correspondant à l'énergie minimale pour l'oscillateur harmonique) constituent également des familles bien contrôlées d'états de $\mathcal{H}_{N,\kappa}$. Comme on l'a vu dans le cas de H_{hyperb} , les densités de Husimi sont alors localisées le long des courbes Σ_E , et transversalement elles ont une décroissance gaussienne : près d'un point x_E situé sur Σ_E , on a $H_\psi(x) \sim \frac{C}{|\dot{x}|\sqrt{\pi\hbar}} e^{-\delta x^2/\hbar}$ [123]. Nous nous contenterons, comme état de référence, des ondes planes, c'est-à-dire des états propres de l'opérateur impulsion sur $\mathcal{H}_{N,\kappa}$. Ces ondes planes sont déduites des états $|q_j\rangle_{N,\kappa}$ par transformée de Fourier discrète, c'est-à-dire par rotation de $\pi/2$ des fonctions de Husimi. Leurs N zéros sont donc sur une ligne horizontale, espacés de $1/N\sqrt{2}$.

Enfin, on peut construire des états localisés pour lesquels la densité de zéros est délocalisée sur tout le tore, contrairement aux trois types décrits ci-dessus. Pour cela, il suffit de modifier légèrement un état sur réseau en déformant le réseau de façon lisse (v. figure 4.1). La densité moyenne de zéros peut même tendre vers la mesure uniforme, bien que la fonction de Husimi devienne piquée en un point. La construction de ces fonctions de Husimi dans le cas où le réseau initial est carré est faite dans [3, section 4.2.4], donc elle n'est valable que pour des valeurs $N = M^2$. Citons simplement le résultat obtenu pour un cas particulier. En reprenant les notations de l'article, on considère des paramètres $\lambda_q = \lambda_p = \lambda$ dépendant de N comme $N^{\alpha-1}/(4\pi^2)$, où $0 < \alpha < 1$, la suite des fonctions H_N est alors piquée en l'origine, bien que la densité moyenne de zéros converge vers 1. Près de l'origine, la fonction (normalisée) peut s'écrire

$$H_N(x) \sim N^\alpha e^{-\pi N^\alpha x^2} H_\chi(Mx) \quad \text{pour } |x| = o(1), \quad N \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

(H_χ est défini dans l'équation (3.13)). C'est pour ce cas particulier de réseau déformé qu'on donne les ‘normes’ dans le tableau 4.1. Le pic en l'origine sera d'autant plus singulier que α sera proche de 1 (pour $\alpha = 1$, c'est-à-dire des valeurs fixes de λ , la formule ci-dessus n'est plus valable).

Pour l'instant, nous ne sommes pas en mesure de relier précisément les phénomènes observés spécifiques au système à une dynamique semi-classique : la seule information utilisée est l'ergodicité du système classique, qui débouche au niveau quantique sur la propriété de Schnirelman. Nous commençons donc par rappeler précisément en quoi consiste cette propriété, et à quels systèmes elle s'applique.

4.3 Propriété de Schnirelman

Il existe plusieurs versions de ce théorème, selon le système étudié. Nous ne les citerons pas toutes, mais en donnons une sorte d'archétype :

Théorème 1 (*Schnirelman*)

Considérons un système dynamique quantique (hamiltonien ou à temps discret) dont la version classique est ergodique (sur une surface d'énergie, ou sur l'espace des phases réduit, notés tous les deux X). Alors, pour presque toute suite de fonctions propres $\{\psi_{\hbar}\}$ des propagateurs quantiques, les fonctions de Husimi (resp. de Wigner) associées convergent vers la mesure ergodique \mathcal{L} sur X . Cette convergence s'entend au sens de la mesure (resp. des distributions), c'est-à-dire que pour toute fonction $f(x)$ continue (resp. C^∞) sur X , on aura

$$\int_X dx f(x) H_{\psi_{\hbar}}(x) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \int_X d\mathcal{L}(x) f(x). \quad (4.5)$$

(dans les cas qui vont nous occuper, \mathcal{L} est la mesure de Lebesgue sur X). Le terme 'presque toute suite' (dans le cas de dynamiques sur un espace de Hilbert de dimension finie N) signifie que l'équidistribution est effective si les états ψ_N appartiennent à des sous-ensembles $\mathcal{E}(N)$ de $\{1, \dots, N\}$ tels que $\frac{\#\mathcal{E}(N)}{N} \rightarrow 1$. Ce théorème laisse donc la porte ouverte à des 'suites exceptionnelles' d'états propres, pour lesquelles les densités de Husimi ne convergeraient pas vers la mesure ergodique (et pourraient par exemple converger vers d'autres mesures invariantes singulières, par exemple portées par un nombre fini d'orbites périodiques).

On dira qu'une suite d'états $\{\psi_{\hbar}\}$ (sans présumer de son origine) pour laquelle les fonctions de Husimi $H_{\psi_{\hbar}}$ convergent en mesure vers \mathcal{L} satisfait la *propriété de Schnirelman*.

4.3.1 Historique

Après avoir été conjecturé par Schnirelman [116] sous une forme plus faible (c'est-à-dire l'équidistribution des fonctions propres dans l'espace de configuration), le théorème a tout d'abord été montré pour les fonctions propres du laplacien [130, 42], puis plus généralement pour un système hamiltonien ergodique sur la surface d'énergie Σ_E [69]. Plus récemment, il l'a été pour les billards chaotiques [133, 61], qui réclament un traitement plus fin du fait de la singularité du potentiel. Pour les applications à temps discret sur le tore (où la limite semi-classique prend la forme de $N = (2\pi\hbar)^{-1} \rightarrow \infty$), les premiers résultats (à ma connaissance) concernent les transformations quantifiées du chat U_S : en utilisant les propriétés arithmétiques de la transformation (qui leur permettent de calculer explicitement les états propres), Degli Esposti, Graffi et Isola ont montré qu'il existe un ensemble infini $\{N_k\}$ de valeurs de N tel que, pour toute suite $\{\psi_{j,N_k}\}$ d'états propres de U_S , les densités de Husimi convergent vers \mathcal{L} lorsque $k \rightarrow \infty$. Pour ces valeurs particulières de N , ils obtiennent donc une propriété

d'*ergodicité quantique unique*, au sens de Rudnick et Sarnak [112], ce qui signifie que la propriété de Schnirelman exclut toute suite exceptionnelle. En utilisant des méthodes plus générales, Bouzouina et De Bièvre ont montré que la propriété d'équidistribution était en fait valable pour presque toute suite d'états propres, sans aucune restriction sur les valeurs de N ; leur résultat se généralise aisément aux chats perturbés, tel celui décrit dans la section 3.3.2. Ils montrent également l'ergodicité quantique unique pour les translations irrationnelles quantifiées du tore (qui sont classiquement ergodiques mais pas mélangeantes). La propriété de Schnirelman pour les états propres du boulanger quantique n'a été montrée que dans l'espace de configuration, autrement dit pour des fonctions $f(x)$ ne dépendant que de la variable q (ou bien p , par symétrie des fonctions de Husimi) [47]. Nos résultats numériques indiquent des fluctuations plus importantes des densités de Husimi pour le boulanger que pour les chats (perturbés ou non) ; nous les supposons induites par la discontinuité de la transformation classique, mais il semble que ces fluctuations soient insuffisantes pour contredire clairement l'équidistribution au sens de la mesure (v. section 4.7.3).

Le point névralgique dans la démonstration de l'équidistribution des densités de Husimi est le théorème d'Egorov, qui énonce l'équivalence, à l'ordre dominant en \hbar , entre évolutions quantique et classique pendant un temps fini t , pour toute transformation T sur le tore :

Théorème 2 (*Egorov*)

Pour tout temps t entier, pour toute fonction f lisse sur \mathbb{T}^2 , il existe une constante C telle que

$$\|U_T^{-k}Op^W(f)U_T^k - Op^W(f \circ T^k)\| \leq C\hbar. \quad (4.6)$$

Cette propriété est standard pour des systèmes hamiltoniens continus [69]. Modulo des corrections dues aux discontinuités de la dynamique, elle s'étend également aux problèmes de laplaciens sur les variétés à bords, comme les billards [57]. En revanche, dans le cas des applications, il doit être montré au cas par cas. Selon la transformation, ce théorème peut être trivial (par exemple dans le cas des transformations du chat, où les deux opérateurs sont rigoureusement égaux) ou au contraire difficile à établir (pour l'application du boulanger, à cause des discontinuités).

4.3.2 Preuve schématique du théorème de Schnirelman

Nous résumons la preuve donnée dans [36] pour une application ergodique T sur le tore. Les densités de Husimi $H_{j,N}$ ($j = 1, \dots, N$) des états propres de U_T définissent des mesures $\mu_{j,N}$ sur \mathbb{T}^2 , qu'on cherche à décrire. Pour cela, on considère une fonction lisse f sur \mathbb{T}^2 de moyenne nulle et on voudrait estimer

$$\mu_{j,N}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{T}^2} f(x) H_{j,N}(x) dx = \langle \psi_j | Op_{N,\kappa}^{AW} | \psi_j \rangle_N. \quad (4.7)$$

(il s'agit de montrer que cette quantité est petite lorsque $N \rightarrow \infty$). En utilisant le théorème d'Egorov et l'équivalence (à l'ordre dominant) entre quantifications de Weyl et d'anti-Wick (v. section 2.1.1), on aboutit à l'estimation suivante, pour un intervalle de temps K fixé :

$$\mu_{j,N}(f) = \mu_{j,N} \left(\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} f \circ T^k \right) + O(N^{-1}) \quad (4.8)$$

C'est à partir de là qu'on peut utiliser la propriété d'ergodicité classique (eq. 1.9)) : la moyenne temporelle de f dans le membre de droite converge vers zéro pour presque tout point initial x , lorsque $K \rightarrow \infty$. Pour $\epsilon > 0$ donné, le sous-ensemble du tore constitué des points ayant déjà parcouru celui-ci de façon assez uniforme au temps K :

$$\Omega(K, \epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{T}^2 \text{ s.t. } \left| \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} f \circ T^k(x) \right| < \epsilon \right\} \quad (4.9)$$

est de mesure proche de 1 si K est grand. En utilisant l'équidistribution des densités semi-classiques *en moyenne* (c'est-à-dire $\text{Tr}(Op^W(f)) = O(1)$), on arrive à montrer que la fraction d'états propres pour lesquels le complémentaire de $\Omega(K, \epsilon)$ sur \mathbb{T}^2 contribue de façon importante à l'intégrale (4.7) est petite dans la limite $N \rightarrow \infty$. Pour les autres états (l'immense majorité, définissant des ensembles asymptotiquement denses $\mathcal{E}_f(N)$ de $\{1, \dots, N\}$), cette contribution est petite, donc (4.7) également, vu la définition de $\Omega(K, \epsilon)$. On a donc prouvé la propriété pour une fonction particulière f . Par un argument standard d'extraction diagonale par rapport à une suite dense de fonctions, on obtient des ensembles $\mathcal{E}(N)$ de densité asymptotique 1 pour lesquels la propriété est vraie pour toute fonction lisse sur \mathbb{T}^2 .

4.4 Quelques outils d'analyse des fonctions de Husimi

La convergence de (presque) toutes les fonctions de Husimi vers la mesure de Lebesgue n'empêche pas celles-ci de présenter (à l'œil nu) des caractéristiques très différentes d'un état propre à un autre, même lorsque la constante de Planck est petite (voir par exemple fig. 4.2, et les figures 1a de [3] pour les états propres du chat S_1). Les densités de Husimi sont des mesures très régulières, puisqu'elles sont analytiques réelles. Pour essayer de différencier *quantitativement* les états propres, on cherche à regrouper ceux-ci en *familles* d'états ayant des caractéristiques similaires, pour une plage assez large de valeurs de N . Identifier une famille constituerait une première étape de l'objectif à long terme, c'est-à-dire associer chaque famille à une 'particularité' de la mécanique classique (par exemple, regrouper

dans une famille les états ayant une cicatrice au-dessus d'une orbite périodique). La figure 4.2 montre par exemple trois états du boulanger, les deux premiers ayant une cicatrice marquée sur l'orbite de période 2 $(1/3, 2/3) - (2/3, 1/3)$, tandis que le troisième a une cicatrice non-ponctuelle le long des variétés stable et instable de l'origine.

4.4.1 'Normes' des fluctuations

Nous avons tout d'abord mesuré les propriétés de fluctuations globales des fonctions de Husimi, en utilisant un arsenal de 'normes' permettant d'avoir accès à plus de détails des densités H_ψ que les propriétés en mesure. Ces 'normes' sont toutes construites à partir des fonctionnelles

$$\|H_\psi\|_r \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{\mathbb{T}^2} H_\psi(x)^r dx \right)^{1/r}, \quad \text{pour } 0 < r < \infty, \quad \text{et (4.10)}$$

$$\|H_\psi\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \mathbb{T}^2} H_\psi(x), \quad (4.11)$$

$$\|H_\psi\|_0 = \text{GM}[H_\psi] \stackrel{\text{def}}{=} \exp \int_{\mathbb{T}^2} \log H_\psi(x) dx. \quad (4.12)$$

Ce ne sont des normes au sens mathématique que lorsque $r \geq 1$. Les fonctions H_ψ sont lisses et définies sur un compact, donc toutes ces intégrales convergent. D'autre part, on s'impose toujours (sauf dans le modèle aléatoire) de normaliser les états de sorte que $\|H_\psi\|_1 = 1$. Enfin, les propriétés de convexité imposent les inégalités $0 \leq r \leq s \leq \infty \implies \|\cdot\|_r \leq \|\cdot\|_s$ [111, p. 70]. Ces différentes quantités peuvent être reliées à des cas particuliers d'entropies de Renyi [95]; l'utilisation spécifique de ces entropies sur les fonctions de Husimi a été suggérée dans [107], en terme d'aire de localisation de l'état propre (v. la section suivante).

Les normes à grand paramètre r auront tendance à faire ressortir les pics des H_ψ , tandis qu'au contraire les petites valeurs de r (par exemple la moyenne géométrique $\text{GM}[H_\psi]$) seront plutôt influencées par la répartition des zéros de H_ψ (qui sont des singularités de $\log H_\psi$).

La manière la plus simple *a priori* de caractériser l'ampleur d'une cicatrice (généralement ponctuelle, sauf pour certains états propres du boulanger) est de mesurer la hauteur de H_ψ au point fixe (resp. sur les points périodiques). Comme on s'attend à ce qu'un état présente au plus un petit nombre de cicatrices significatives, la norme sup $\|H_\psi\|_\infty$ est généralement un bon indicateur pour trouver les états les plus 'cicatrisés'. En effet, sur les figures 3a(a), 3b(a,b) de [3], on s'aperçoit que les états ayant la norme sup la plus élevée sont également ceux qui ont la plus grosse cicatrice sur un point fixe (l'origine pour les états pairs du chat S_1 et du boulanger) ou une orbite de période 2 (pour les états impairs du boulanger). Pour le chat quantique U_{S_1} , on trouve numériquement que cette norme calculée sur les états propres pairs prend ses valeurs maximales pour les

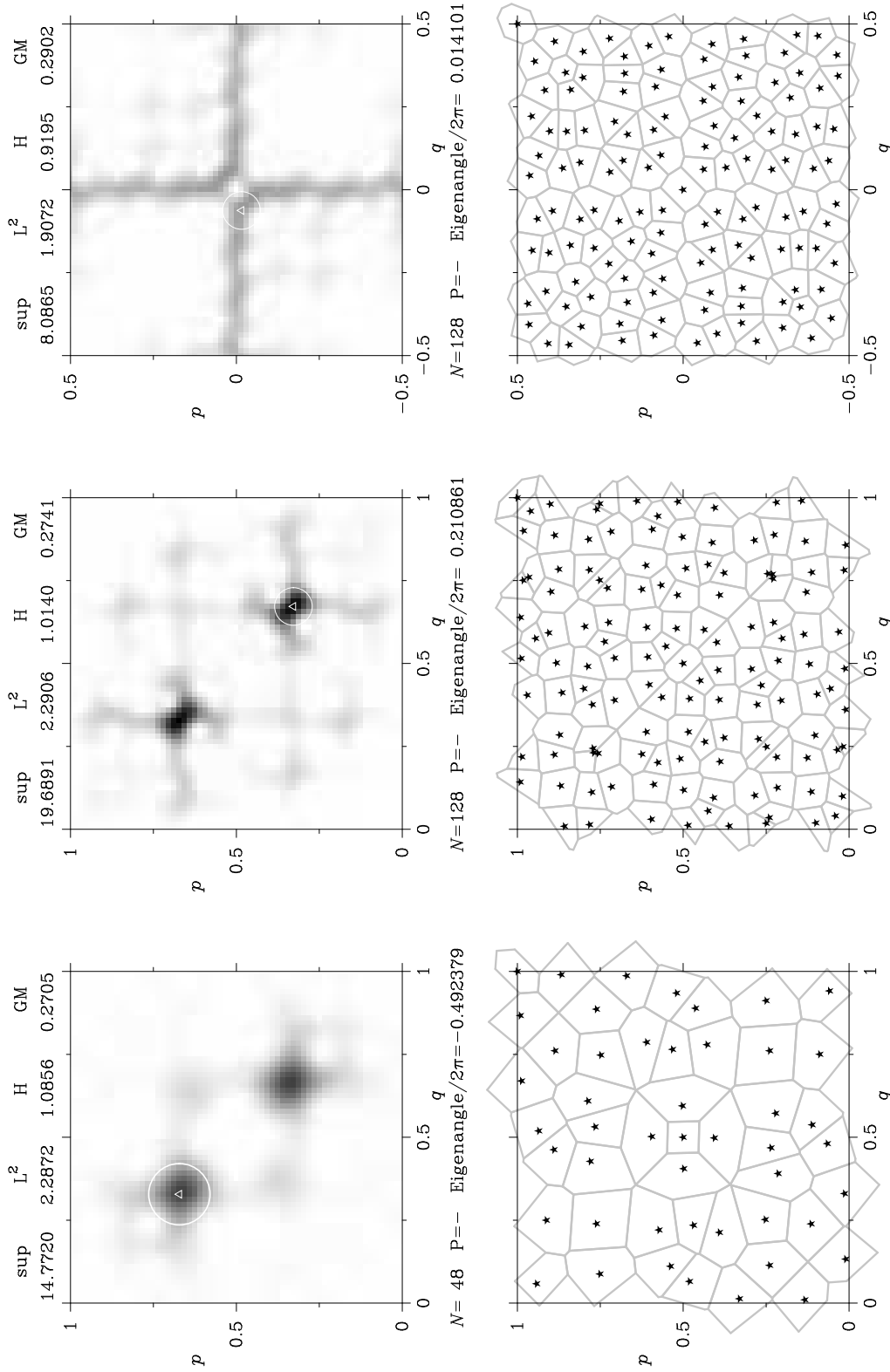


FIG. 4.2 – Trois états propres du boulanger quantique. À gauche, les densités de Husimi, en nuances de gris. À droite, les constellations, ainsi que les cellules de Voronoi induites. Les deux états du bas ont une cicatrice ponctuelle sur une orbite de période 2, tandis que celui du haut présente un renforcement de sa densité le long des axes réel et imaginaire, qui constituent la séparatrice associée à l'origine.

états ayant une cicatrice en l'origine (qui constitue un des deux points fixes de S_1).

Une façon plus ‘douce’ de mesurer la non-ergodicité est de calculer la norme L^2 de la densité de Husimi, donnée par $(\int_{\mathbb{T}^2} H_\psi(x)^2 dx)^{1/2}$. Cette quantité est quar-tique dans la fonction d'onde, elle est donc le pendant dans l'espace des phases du ‘rapport inverse de participation’ (traduction libre de *inverse participation ratio*), qui mesure la localisation dans l'espace de configuration (cette quantité est utilisée pour caractériser les transitions de localisation dans les systèmes désordonnés).

Entropies quantiques

Pour se rapprocher de la propriété en mesure de H_ψ , on utilise la norme $L^{1+\epsilon}$, ou plutôt sa dérivée par rapport à ϵ . On obtient alors la ‘fonction H’ (à la Boltzmann) de l'état ψ , donnée par

$$H[H_\psi] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{T}^2} dx H_\psi(x) \log H_\psi(x). \quad (4.13)$$

De par la convexité des normes L^r citée plus haut, cette fonction est forcément positive (elle ne s'annule que pour une fonction constante). Cette fonction est reliée à l'entropie de l'opérateur densité $\hat{\rho}$ introduite par Wehrl pour pallier le caractère non semi-classique de l'entropie quantique de Von Neumann $Tr(\hat{\rho} \log \hat{\rho})$ [126]. Nous nous contenterons de calculer cette fonction H pour les fonctions de Husimi des états propres individuels. Néanmoins, le concept d'entropie en mécanique quantique a donné lieu à de multiples développements, que nous citons brièvement (la liste qui suit n'est pas exhaustive, loin s'en faut).

L'entropie de Wehrl a donné lieu à des généralisations ayant pour objectif de retrouver semi-classiquement l'entropie de Kolmogorov–Sinai du système dynamique T (cf. section 1.1), ou au moins certaines de ses propriétés. Notre fonction $H[H_\psi]$ est un cas particulier de cette entropie de Wehrl, dans les cas où la matrice densité représente un état pur : cette entropie devrait rendre compte de l'‘information’ contenue dans la densité H_ψ : si celle-ci est très uniforme, $H[H_\psi] \rightarrow 0$, tandis qu'au contraire une fonction H_ψ localisée autour d'un point fait diverger H dans la limite semi-classique (cf. tableau 4.1). Par exponentiation de cette entropie, Prosen définit quantitativement l'aire de localisation de l'état ψ , état propre d'un système à dynamique classique mixte, c'est-à-dire contenant des îlots de stabilité dans une ‘mer’ chaotique [107].

Au lieu de considérer séparément les fonctions de Husimi des différents états propres de U_T , on peut au contraire tous les regrouper afin d'obtenir une ‘entropie dynamique’ dépendant non plus de l'état propre considéré, mais du point x de l'espace des phases [95]. Cette approche permet de retrouver certaines caractéristiques classiques de l'évolution quantique, dans le cas où la dynamique est mixte. On a plusieurs possibilités de définir cette entropie :

$$\text{l'une est définie par} \quad S(x) \stackrel{\text{def}}{=} - \int \rho(x', x) \log \rho(x', x) dx', \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
\text{en notant } \rho(x', x) &= \sum_{j=1}^N H_{j,N}(x') H_{j,N}(x); \\
\text{l'autre vaut } \tilde{S}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{j=1}^N H_{j,N}(x) \log H_{j,N}(x). \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Elles sont toutes deux liées à l'évolution dans le temps d'un paquet d'onde gaussien par U_T .

On peut également définir une entropie dynamique 'globale' de l'application quantique U_T , qui serait le correspondant quantique de l'entropie de Kolmogorov-Sinai pour le système classique. Là aussi, plusieurs approches sont possibles. Par analogie avec la définition de l'entropie de K-S, on peut considérer des partitions $\{A_1, \dots, A_r\}$ de l'espace des phases, et utiliser les amplitudes $\langle z_1 | U_T | z_2 \rangle$ pour définir le taux de transition d'une région A_i à une autre. Des résultats rigoureux ont été obtenus sur la moyenne de cette entropie prise sur l'ensemble des matrices unitaires de taille $N \times N$ [118].

Il existe d'autres entropies (plus 'algébriques') associées à un opérateur d'évolution U_T [55, 44]. À la différence des précédentes, ces entropies-là ne 'voient' pas U_T comme un propagateur sur un espace de Hilbert, mais plutôt comme un automorphisme sur une algèbre d'observables quantiques (celle-ci peut être une algèbre de Von Neumann, ou une C^* algèbre). Ces entropies sont généralement plus difficiles à calculer explicitement que les précédentes, sauf pour des cas assez simples [79]. Par contre, elles se prêtent mieux à des généralisations à un nombre infini de degrés de liberté, en particulier à l'étude de systèmes statistiques quantiques.

Moyenne géométrique

Enfin, à l'extrémité de la chaîne des 'normes' L^r se trouve la moyenne géométrique de la fonction de Husimi, $\text{GM}[H_\psi] = \exp \int_{\mathbb{T}^2} \log H_\psi(x) dx$. Au contraire des autres 'normes', cette quantité est maximale pour une densité rigoureusement plate (on a en effet $\text{GM}[1] = 1$), et prend des valeurs proches de zéro pour les états localisés. La pertinence de cette moyenne pour notre étude vient des propriétés multiplicatives de la fonction de Husimi : en effet, la représentation stellaire est reliée à la densité de Husimi par le *logarithme* de cette dernière. Par exemple, la moyenne géométrique est reliée simplement à la constante de normalisation du produit de Hadamard (3.22). En effet, la fonction

$$\hat{H}_\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} H_\psi(x) / \text{GM}[H_\psi] \quad (4.16)$$

est 'plus naturelle' que H_ψ au point de vue de la factorisation, puisqu'on a :

$$\hat{H}_\psi(x) = \prod_{l=1}^N \hat{H}_\chi(x - x_l). \quad (4.17)$$

(La fonction H_χ est définie en (3.13)). Cette modification de H_ψ permet également de définir la densité de Husimi ‘logarithmique’

$$h_\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \log \hat{H}_\psi(x) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N h_\chi(x - x_l), \quad (4.18)$$

cette densité est alors de moyenne nulle sur \mathbb{T}^2 .

Dérivée de ψ aux zéros

Dans la limite semi-classique, la fonction de Husimi présente localement de fortes oscillations, puisqu'elle doit à la fois s'annuler en N points (répartis uniformément sur le tore dans le cas d'états propres chaotiques), et être normalisée à l'unité. On ne peut donc mesurer sa *hauteur moyenne locale* qu'en la lissant sur un disque de taille $\gg 1/N$ (c'est-à-dire plus grand que la taille moyenne d'une cellule de Voronoï, cf. section 4.4.2). Un autre moyen consiste à sélectionner un zéro z_l dans la région qu'on observe, et remarquer que localement la fonction de Husimi vaut

$$H_\psi(z, \bar{z}) \approx |(z - z_l)\psi'(z_l)|^2 e^{-2\pi N z_l \bar{z}_l}. \quad (4.19)$$

Par conséquent, la quantité scalaire $f(z_l) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi N} |\psi'(z_l)|^2 e^{-2\pi N |z_l|^2}$ semble être un indicateur valable de la hauteur du relief local de H près du zéro z_l . On s'attend en effet à ce qu'elle fluctue beaucoup moins que $H_\psi(z, \bar{z})$, ou que la dérivée $|\psi'(z)|$ prise en un point quelconque de $T_\mathbb{C}$. La factorisation de Hadamard (3.22) de $H_\psi(z, \bar{z})$ montre que $f(z_l)$ représente en fait l'influence globale des $N - 1$ autres zéros sur la valeur de H_ψ autour de z_l . On pourrait étendre cette distinction entre un zéro particulier et le reste du monde à un ensemble fini de zéros proches, pour mieux rendre compte des variations locales de H_ψ . Nous nous restreignons ici à l'approximation (4.19), et admettons que la distribution des valeurs de $f(z_l)$ sur tous les zéros de ψ mesure correctement les variations de hauteur locale moyenne de la fonction de Husimi, et constitue à ce titre un autre type de mesure des fluctuations quantiques (également invariante d'échelle, grâce au facteur $\frac{1}{2\pi N}$ dans la définition de $f(z_l)$).

Pour un état sur réseau, cette valeur est la même pour tous les zéros, elle ne dépend que du paramètre τ apparaissant dans (4.1). Par conséquent, $f(z_l)$ sera bornée pour tous les états propres sur réseau d'une application U_S donnée, au même titre que les autres invariants. Pour les états localisés, les valeurs de $f(z_l)$ décroissent exponentiellement vers zéro dans la limite $N \rightarrow \infty$, puisque les zéros sont situés loin des régions classiques.

Le modèle de vecteurs aléatoires fournit la distribution de $f(z_l)$: à des corrections exponentiellement petites près, on trouve $f e^{-f}$ (voir section 4.7.1). Nous avons établi un histogramme cumulé des valeurs de ce scalaire, à partir d'un unique état propre du chat U_{S_2} pour $N = 149$, et l'avons comparé à cette distribution théorique (v. figure 4.3) : l'accord entre les deux est très bon, *déjà au niveau d'un état individuel*.

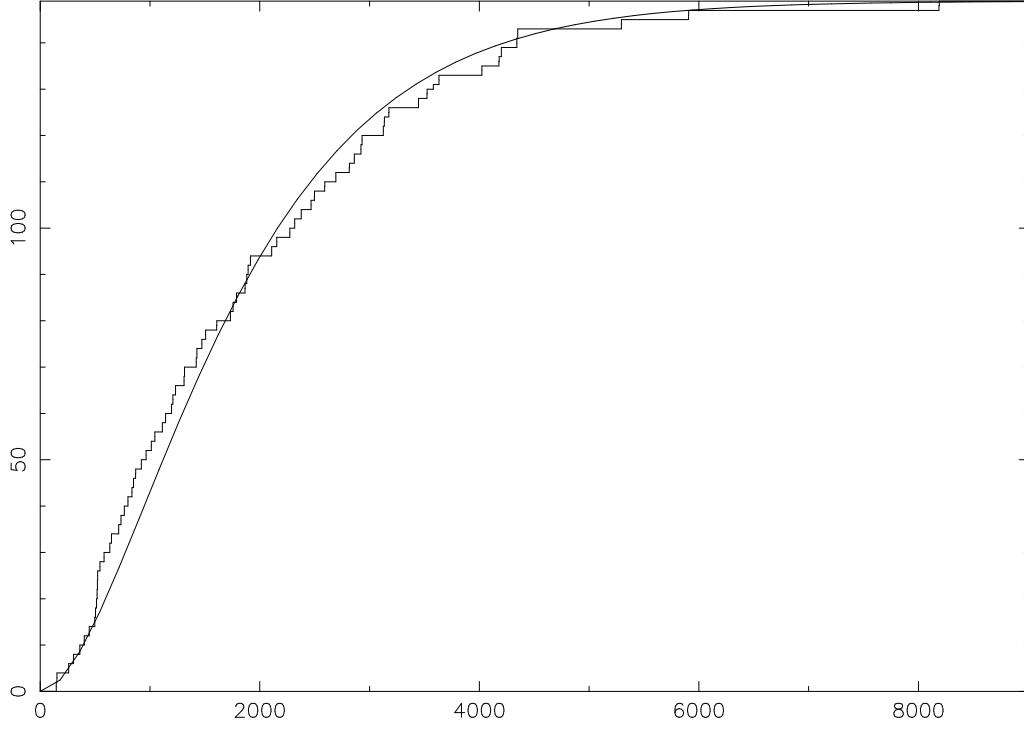


FIG. 4.3 – Histogramme cumulé des valeurs de $f(z_l)$ sur tous les zéros d'un état propre de U_{S_2} à $N = 149$. La courbe lisse représente la prédiction du modèle de vecteur complexe aléatoire.

4.4.2 Représentation stellaire

Comme on l'a déjà mentionné plusieurs fois, cette représentation consiste à 'écrire' un état $\psi \in \mathcal{H}_{N,\kappa}$ comme une distribution de N points sur \mathbb{T}^2 , autrement dit comme la densité normalisée

$$\rho_\psi(x) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \delta_{\text{per}}(x - x_l) \quad (4.20)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \rho_{\psi,k} e^{2i\pi k \cdot x}. \quad (4.21)$$

(Les points $x_l = (q_l, p_l)$ correspondent aux zéros $z_l = (q_l - ip_l)/\sqrt{2}$ de la fonction de Bargmann $\psi(z)$.) Cette représentation est à la fois minimale, et elle vit dans l'espace des phases, donc devrait se prêter à une analyse semi-classique.

On est en effet capable, par des arguments semi-classiques, de décrire précisément les positions des zéros individuels lorsque ψ est état propre d'un système hamiltonien autonome (cf. section 2.2) : ceux-ci se répartissent le long de lignes (d'anti-

Stokes) définies classiquement ; le long de ces lignes, ils sont distants de l'ordre de $1/N$.

Pour un système chaotique, l'absence du formalisme WKB nous laisse totalement démuni face au problème. Numériquement, on s'aperçoit que les zéros d'états propres chaotiques sont plutôt équidistribués dans l'espace des phases, contrairement au cas intégrable (cf. fig. 4.2). Du fait de la compacité du tore, la distance moyenne entre les zéros les plus proches est alors de l'ordre de $N^{-1/2}$. Cependant, il pourrait *a priori* exister de grandes fluctuations autour de cette valeur moyenne, néanmoins compatibles avec l'équidistribution. Or, numériquement, on voit très rarement des paires de zéros beaucoup plus proches l'un de l'autre que cette distance moyenne. On voit encore moins d'agrégats de zéros, comme il pourrait s'en produire si les zéros aléatoires étaient *indépendants* sur \mathbb{T}^2 (suivant une statistique poissonnienne). On a plutôt l'impression que les zéros voisins ne sont pas indépendants, mais qu'au contraire ils se *repoussent* sur une distance de l'ordre de $N^{-1/2}$, c'est-à-dire la distance à partir de laquelle les contraintes de taille finie se font sentir. Cette répulsion a déjà été remarquée pour les systèmes pulsés chaotiques sur la sphère et le tore [85]. Quantitativement, elle est mesurée par la fonctions de corrélation à deux zéros :

$$R_\psi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N^2} \sum_{l \neq l'} \delta_{\text{per}}(x - x_l) \delta_{\text{per}}(y - x_{l'}). \quad (4.22)$$

Pour un système chaotique, il est en général nécessaire de moyenner cette fonction sur tous les états propres pour une valeur de N donnée ; on obtient ainsi un histogramme qu'on peut comparer aux résultats des modèles statistiques : R_ψ est connue analytiquement pour le modèle des vecteurs aléatoires sans symétrie [66], et on la contrôle également pour les vecteurs pairs complexes ou réels (cf. section 4.7.1). Le résultat statistique correspond très bien aux données numériques pour les modèles pulsés étudiés par Lebœuf et Shukla [85]. Pour les applications du chat et du boulanger, nous n'avons pas comparé directement la fonction de corrélation à deux points, mais avons préféré utiliser sa transformée de Fourier, c'est-à-dire le *facteur de forme* de la constellation,

$$F_\psi(k) \stackrel{\text{def}}{=} |\rho_{\psi,k}|^2 \quad (4.23)$$

$$= \frac{1}{N} + \int \int_{\mathbb{T}^2} d^2x_1 d^2x_2 e^{-2i\pi k \cdot (x_1 - x_2)} R_\psi(x_1, x_2). \quad (4.24)$$

Ce facteur de forme (écrit ici pour un état individuel) rend compte des fluctuations des coefficients de Fourier de la constellation, donc de fluctuations *globales* de densité, alors que ρ_ψ et R_ψ permettent de déceler des fluctuations *locales*.

Y a-t-il un ordre local des constellations ?

Pour certains états propres, les constellations forment localement des ensembles structurés, ressemblant à des réseaux déformés, ou à des 'lignes hyperboliques' autour d'une cicatrice. Néanmoins, l'apparition de ces structures locales

semble assez sporadique. Pour en effectuer une analyse quantitative, nous avons tenté d'analyser les distributions de cellules de Voronoi associées aux constellations (chaque cellule centrée autour d'un zéro z_l contient les points plus proches de z_l que de tous les autres zéros, v. la figure 4.2). À ce niveau, on préfère donc interpréter la distribution de points comme une partition du tore en alvéoles, par analogie aux systèmes physiques ayant réellement une géométrie alvéolaire : mousses, agrégats métalliques, tissus biologiques etc. Pour tous ces systèmes, la paroi de l'alvéole est le siège de la dynamique : elle constitue physiquement le matériau étudié, et est donc soumise à des contraintes de rigidité intrinsèques. Au contraire, dans le cas des cellules de Voronoi d'une distribution de points, les alvéoles sont virtuelles, elles ne contiennent pas de dynamique propre, mais permettent pourtant de caractériser celle (plus intrinsèque?) des points. Une partition de Voronoi permet en effet de définir aisément des observables associées aux cellules (nombre de côtés, surface, périmètre), qui donnent des informations quantitatives sur la constellation : la surface de la cellule définit la portion de l'espace occupée par le point, autrement dit l'inverse d'une densité locale de points, le nombre de côtés donne le nombre de plus proches voisins, le rapport entre périmètre et surface donne une indication sur l'isotropie de la cellule, donc de la distribution de zéros voisins, etc.

Cette approche a déjà été utilisée pour l'étude de distributions aléatoires de points dans le plan : le cas de la distribution poissonnienne a permis de définir une "distribution de Voronoi aléatoire" [50, 110], dont on contrôle assez bien les propriétés statistiques ; plus récemment, Le Caër et Ho [87] ont utilisé les mêmes idées pour décrire les distributions des valeurs propres de matrices aléatoires complexes (non hermitiennes) [60] : ils aboutissent à une statistique plus 'piquée' des différentes observables, indiquant une rigidité plus grande de la distribution des alvéoles. La statistique des observables associées aux cellules permet en général de mettre en évidence la rigidité de la constellation de façon plus précise que par la seule fonction à deux points $R(x, y)$: pour un réseau perturbé, la majorité des points aura six voisins (sauf si le réseau de départ est rectangulaire), et les tailles des cellules variera peu. Nous avons également cherché à corrélérer la densité locale de zéros (c'est-à-dire la surface des cellules) à la présence d'une cicatrice. Une telle corrélation n'a pu être systématiquement mise en évidence sur les états chaotiques : la densité de zéros semble en effet présenter un creux près d'une cicatrice, mais inversement une baisse de densité n'implique pas forcément un grand pic de H_ψ (voir les états du boulanger sur la figure 4.2).

Plus généralement, l'étude statistique des cellules de Voronoi n'a pas été poussée assez loin pour pouvoir éventuellement mettre en évidence des lois d'échelle caractéristiques des constellations chaotiques (comme il en existe pour les distributions aléatoires de points décrites ci-dessus). La raison principale est la difficulté d'extraire numériquement les zéros des états propres dès qu'on atteint des valeurs raisonnables de N (c'est-à-dire quelques centaines) ; les lois d'échelle obtenues pour les cas statistiques étaient en effet basées sur des études portant sur

plusieurs milliers de points.

De plus, la recherche de ‘familles’ d'états propres directement au niveau des constellations s'est montrée difficile à mettre en œuvre. Même en se restreignant à certaines valeurs de N et aux états ayant une cicatrice en un point donné, les configurations locales de zéros semblent n'obéir à aucun semblant d'ordre semi-classiquement. Seule la loi d'échelle (triviale) de la distance typique entre zéros et la largeur des cicatrices (toutes deux $\sim N^{-1/2}$) est identifiable sur les données numériques. On gardera donc des constellations chaotiques l'image des molécules dans un gaz dense, plutôt que celle des atomes d'un solide déformé. En particulier, la distribution ne présente pas en général d'anisotropie globale marquée, comme ce serait le cas pour un solide (les coefficients de Fourier ρ_k pourront néanmoins être anisotropes dans le cas des vecteurs réels, mais cette anisotropie est due à la densité singulière de points sur les axes de la symétrie). En ce sens, les états sur réseau (même déformés) ne peuvent modéliser de façon correcte les constellations chaotiques. Autrement dit, la structure locale des constellations ne peut pas se décrire à partir d'un produit cartésien de deux distributions unidimensionnelles (comme c'est le cas pour un réseau déformé, cf. [3, section 4.2.4]), mais nécessite une description intrinsèquement bidimensionnelle.

Coefficients de Fourier - Logarithme de H_ψ

Nous tirons une autre leçon de la section précédente : la ‘structure fine’ de la densité de Husimi dans une certaine région semble décorrélée des propriétés locales de la constellation, dans le cas d'états propres chaotiques. Ceci est clairement visible dans l'exemple de l'état à réseau déformé (qui n'est pas un état propre chaotique), pour lequel une régularité presque parfaite du réseau n'empêche pas l'apparition d'un fort pic de H_ψ . La construction de ce contre-exemple indique en fait la marche à suivre : c'est plutôt dans les coefficients de Fourier $\rho_{\psi,k} = N^{-1} \sum_{l=1}^N e^{-2i\pi k \cdot x_l}$ qu'il faut chercher la présence du pic. Cet exemple ne peut bien entendu rendre compte de la complexité des états propres chaotiques : il a été construit comme produit de deux densités unidimensionnelles, et c'est sous cette forme qu'on a pu exhiber la présence d'un pic. Néanmoins, nous verrons que les coefficients de Fourier $\rho_{\psi,k}$ sont des indicateurs valables de la non-uniformité de H_ψ . On peut déjà le sentir d'après la relation simple qui lie ρ_ψ à la densité de Husimi logarithmique $h_\psi(x) = \sum_{0 \neq k \in \mathbb{Z}} h_{\psi,k} e^{2i\pi k \cdot x}$, définie dans l'équation (4.18) :

$$\Delta h_\psi(x) = 4\pi(\rho_\psi(x) - 1), \quad (4.25)$$

$$\text{ou, en transformée de Fourier,} \quad h_{\psi,k} = -\frac{\rho_{\psi,k}}{\pi k^2}. \quad (4.26)$$

La première équation provient simplement de la structure analytique de la fonction de Husimi (3.21). En fait, on verra qu'elle peut se généraliser à d'autres

géométries que le tore. En remplaçant ψ par la brique élémentaire χ , on trouve :

$$\Delta h_\chi(x) = 4\pi(\delta_{\text{per}}(x) - 1), \quad (4.27)$$

autrement dit h_χ est (presque) la fonction de Green sur le tore. Physiquement, on peut donc interpréter $h_\psi(x)$ comme le *potentiel électrique* créé par N charges négatives ponctuelles sur les zéros et une densité de charge uniforme positive N sur \mathbb{T}^2 (afin de respecter la neutralité électrique globale). Cette équation est à la base de la preuve de l'équidistribution des constellations, section 4.6. Ce passage au logarithme est le ‘nerf’ qui rend la représentation stellaire à la fois attrayante et difficile à analyser. Dans le cas intégrable, il mène simplement aux approximations WKB pour les fonctions propres.

4.5 Résultats sur les ‘normes’

Nous présentons sur les figure 4.4, 4.5 et 4.6 les valeurs des quatre ‘normes’ introduites plus haut (c’est-à-dire la norme sup, la norme L^2 , la fonction H et la moyenne géométrique) calculées sur tous les états propres de la transformation quantique du chat S_1 (resp. du chat perturbé $S_1(\delta)$ et du boulanger), pour une série de valeurs de la constante de Planck. Ces figures incluent les valeurs des normes pour certains états de référence ; nous expliquons ci-dessous comment les obtenir.

4.5.1 ‘Normes’ des états de référence

La plupart des ‘normes’ peuvent être calculées pour les différentes familles d’états de référence, au moins dans la limite semi-classique. Nous les résumons dans le tableau 4.1.

On y distingue clairement les différentes échelles de localisation, en partant de l’état le plus ergodique (le réseau équilatéral) jusqu’à l’état le plus localisé (l’état dégénéré). Tous les états sont normalisés à l’unité. Seules les ‘normes’ des deux états sur réseau peuvent être calculées exactement en partant de la représentation (4.1), et en utilisant des identités sur les fonctions thêta (v. annexe A).

Les valeurs données pour les états aléatoires sont valables uniquement dans la limite $N \rightarrow \infty$. Elles ne correspondent pas exactement aux moyennes des normes prises sur l’ensemble statistique, mais plus exactement à des moyennes d’intégrales du type :

$$\left\langle \int_{\mathbb{T}^2} f(H(x)) d^2x \right\rangle_N \sim \int_0^{+\infty} f(H) e^{-H} dH, \quad (4.28)$$

où on a utilisé le fait que la distribution ponctuelle de $H_\psi(x)$ peut s’écrire asymptotiquement $\mathcal{D}(H) \sim e^{-H}$ (sauf pour les points de symétrie dans les modèles de vecteurs (im)pairs). Il suffit donc d’appliquer la formule ci-dessus en prenant pour

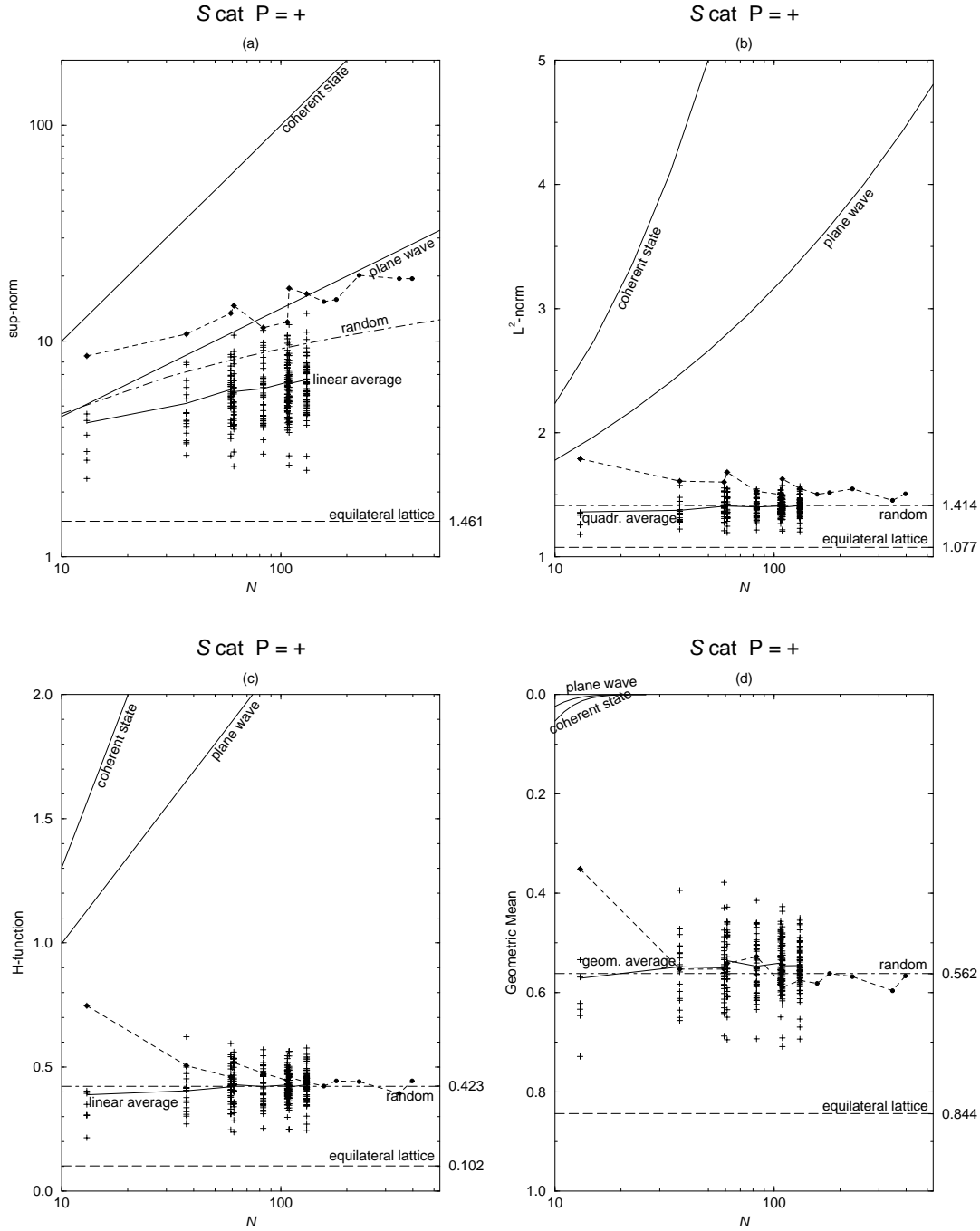


FIG. 4.4 – ‘Normes’ des fluctuations quantiques pour des états propres du chat S_1 . Sont représentées successivement : (a) la norme sup, (b) la norme L^2 , (c) l’entropie H , (d) la moyenne géométrique (l’axe des ordonnées est inversé). Les croix + donnent les valeurs pour les états individuels, tandis que les courbes relient les moyennes sur tous les états. Les cercles pleins représentent les états ayant la plus forte cicatrice en l’origine. On a indiqué les valeurs correspondantes pour quelques états de référence : réseau équilatéral, vecteur aléatoire, onde plane, état cohérent.

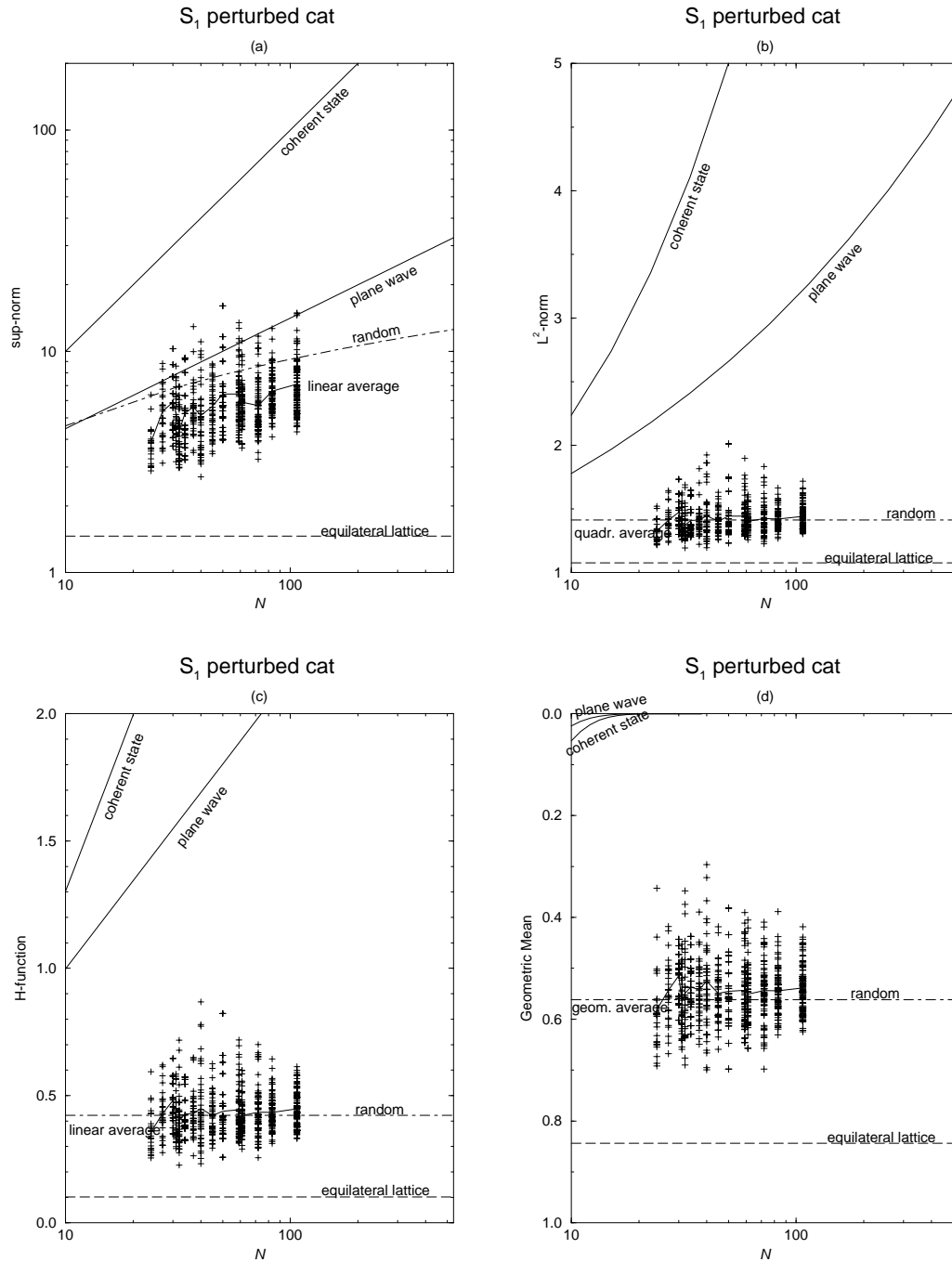


FIG. 4.5 – ‘Normes’ des fluctuations quantiques pour des états propres du chat perturbé $S_1(\delta)$, en utilisant les mêmes conventions que sur la figure 4.4.

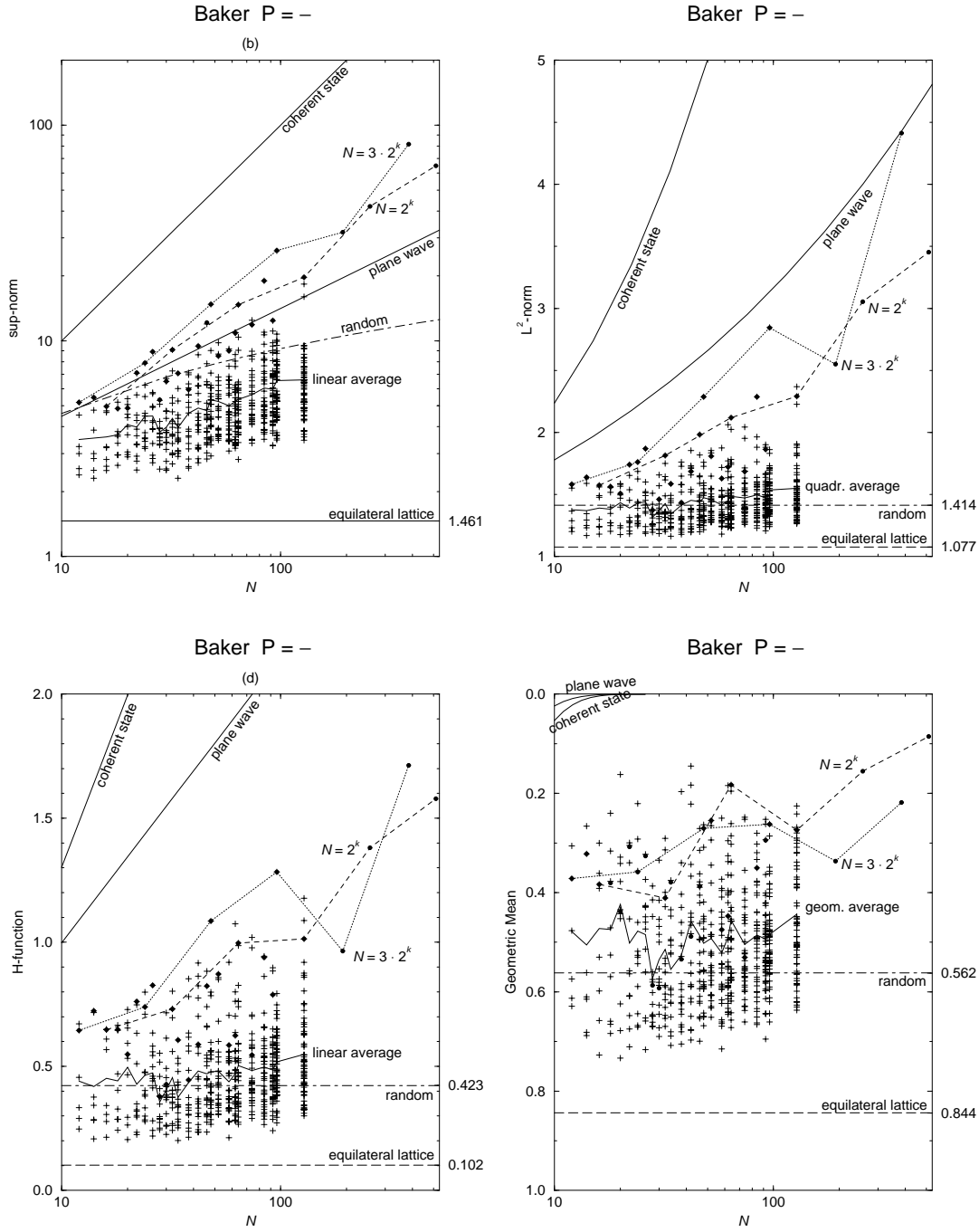


FIG. 4.6 – ‘Normes’ des fluctuations quantiques pour les états propres impairs du boulanger, en utilisant les mêmes conventions que sur la figure 4.4, si ce n’est que les cercles pleins représentent les états propres les plus cicatrisés sur l’orbite de période 2. On a relié deux séries particulières de valeurs de N .

état	norme sup	norme L^2	entropie H	moyenne géom.
réseau équilatéral	$\frac{3\Gamma(1/3)^3}{4\pi^2}$ ≈ 1.4610	$\frac{\sqrt{3}\Gamma(1/3)^{3/2}}{2^{7/6}\pi}$ ≈ 1.0768	≈ 0.1016	$\frac{\sqrt{3}\Gamma(1/3)^3}{4\pi^2}$ ≈ 0.8435
réseau carré	$\frac{\Gamma(1/4)^2}{\sqrt{2}\pi^{3/2}}$ ≈ 1.6693	$\frac{\Gamma(1/4)}{\sqrt{2}\pi^{3/4}}$ ≈ 1.0864	≈ 0.1110	$\frac{\Gamma(1/4)^2}{(2\pi)^{3/2}}$ ≈ 0.8346
aléatoire	$\leq 2 \log N$	$\sqrt{2} \approx 1.4142$	$1 - \gamma \approx 0.4228$	$e^{-\gamma} \approx 0.5615$
onde plane	$\sim \sqrt{2N}$	$\sim N^{1/4}$	$\sim \frac{1}{2}[\log(2N) - 1]$	$\sim \sqrt{2N} e^{-\pi N/6}$
déformé	$\sim N^\alpha \ H_\chi\ _\infty$	$\sim N^{\alpha/2} \ H_\chi\ _2 / \sqrt{2}$	$\sim \alpha \log N$	$\sim N^\alpha e^{-\frac{N^\alpha}{\pi}} \text{GM}[H_\chi]$
cohérent	$\sim N$	$\sim \sqrt{N/2}$	$\sim \log N - 1.$	$\sim N e^{-\pi N/6}$
dégénéré	$\sim N$	$\sim \sqrt{N/2}$	$\sim \log N - 1$	$\sim N 2^{-N}$

TAB. 4.1 – Valeurs numériques des différentes ‘normes’, calculées pour les états de référence, en allant du plus ergodique au plus localisé.

$f(H)$ les fonctions H^2 , $H \log H$ et $\log H$. Pour obtenir les ‘normes’ typiques, on applique ensuite f^{-1} à ces intégrales.

L’estimation sur la norme sup pour le modèle statistique a été faite par rapport au modèle de vecteur normalisé $\mathcal{D}_{CUE}(\psi) \sim \delta(1 - \|\psi\|_2)$. On l’obtient par des arguments géométriques sur la sphère complexe de dimension $N - 1$, ou de façon équivalente l’espace projectif $\mathbb{C}P^{N-1}$: cela revient en fait à montrer que le tore formé par l’ensemble des états cohérents $\{|z\rangle_N, z \in T_{\mathbb{C}}\}$ sur cette sphère est ‘loin’ de la majorité des points de $\mathbb{C}P^{N-1}$, pour la distance de Fubini-Study $d_{\text{FS}}(\phi, \psi) = \arccos |\langle \phi | \psi \rangle|$. Cette borne pour la norme sup typique d’un état aléatoire permet de distinguer une cicatrice d’une fluctuation statistique. On verra en effet que les états les plus cicatrisés ont des normes sup croissant plutôt en loi de puissance par rapport à N .

Les valeurs asymptotiques des ‘normes’ pour les états localisés sont calculées en utilisant l’approximation gaussienne valable dans la limite $N \rightarrow \infty$. Pour le réseau déformé, nous utilisons les états décrits dans la section 4.2.2. Au vu des résultats qui existent dans le plan [90], on s’attend à ce que les valeurs obtenues pour les états cohérent et dégénéré constituent approximativement les bornes supérieures des normes L^r , $r > 1$ et de la fonction H . Remarquons que l’état dégénéré est plus singulier que l’état cohérent au sens de la moyenne géométrique ; cela semble logique, au vu de leurs constellations respectives. Inversement, comme on l’a déjà expliqué, les valeurs des ‘normes’ pour le réseau équilatéral devraient constituer les bornes inférieures (resp. supérieure pour la moyenne géométrique) sur les espaces $\mathcal{H}_{N,\kappa}$.

4.5.2 ‘Normes’ des états propres chaotiques

Nous tâchons ici de tirer quelques conclusions des figures 4.4, 4.5 et 4.6 présentées ici (on peut leur adjoindre les ‘normes’ des états pairs du boulanger, montrées sur la figure 3b de [3]).

Nous avons calculé ces normes pour les états propres individuels, et les avons ensuite moyennées sur tous ces états, de façon analogue à ce qu’on fait pour le modèle aléatoire ; par exemple, pour les normes L^2 , on a effectué la moyenne de $\|H_\psi\|_2^2$, avant d’en prendre la racine carrée. Il ressort en général que ces moyennes sur les ensembles d’états propres sont en très bon accord avec les prédictions des modèles aléatoires pour toutes les transformations. Ceci montre que les états propres restent en moyenne relativement inhomogènes, comme le sont les états aléatoires, même à la limite semi-classique : les densités de Husimi ne tendent donc vers la densité ergodique au sens d’aucune ces ‘normes’ (de plus, elles restent bien moins homogènes que pour le réseau équilatéral).

Au niveau des états propres individuels, on assiste pour les transformations du chat à un léger resserrement des fluctuations de ces ‘normes’ autour de la valeur statistique, dans la limite $N \rightarrow \infty$ (sauf pour la norme sup, pour laquelle on ne dispose pas vraiment de valeur typique, mais seulement d’une borne supérieure). Par contre, pour les états propres du boulanger, les fluctuations semblent s’accroître avec N , en particulier pour les états ayant une forte cicatrice (au-dessus de l’origine pour les états pairs, au dessus de l’orbite de période 2 $\{(1/3, 2/3), (2/3, 1/3)\}$ pour les impairs). Les valeurs des ‘normes’ prises sur ces états à cicatrice semblent également très erratiques, sauf si on restreint les valeurs de N aux puissances de 2 (resp. à trois fois les puissances de 2), qui constituent des valeurs ‘spéciales’, vu la nature de la transformation. Ces fortes fluctuations (qui, pour l’entropie H , restent tout de même inférieures à celles des ondes planes) doivent probablement être mises sur le compte de la *discontinuité* de la transformation classique, qui fait apparaître au niveau quantique des phénomènes de diffraction, également responsables de singularités logarithmiques dans les développements semi-classiques des traces du propagateur U_B [113, 98]. D’un autre côté, des états très ergodiques persistent pour toute valeur de N : on a donc dans le spectre à la fois des états très délocalisés et des états à pics assez prononcés, qui en fin de compte donnent une moyenne correspondant bien au modèle aléatoire.

Les deux transformations classiques S_1 et $S_1(\delta)$ étudiées ici sont continues, à la différence du boulanger. Cela se traduit par des fenêtres de fluctuations beaucoup plus étroites que pour ce dernier. Ce phénomène n’est donc pas dû à de quelconques propriétés arithmétiques du chat S_1 , puisque la perturbation δ brise immédiatement celles-ci (en particulier, le spectre de $U_{S_1(\delta)}$ a bien la statistique de l’ensemble CUE). On a donc bon espoir que la figure 4.5 soit ‘générique’ pour les applications quantiques totalement chaotiques définies à partir d’une transformation lisse de l’espace des phases.

Cas du chat S_1

Sur les figures 4.4 décrivant les ‘normes’ du chat U_{S_1} , les cercles pleins correspondent aux états ayant le pic le plus élevé en l’origine, et il se trouve que ce sont également ceux qui maximisent la norme L^2 ; sur la figure (b), on voit que ces normes maximales convergent vers la valeur statistique : il y a donc un léger resserrement des fluctuations par le haut, vers la valeur moyenne (en tout cas, les valeurs semblent majorées uniformément par rapport à N). En revanche, les valeurs *minimales* des ‘normes’ (pour ces états propres) restent en général nettement en-dessous des moyennes statistiques, tout en étant supérieures aux valeurs du réseau équilatéral : elles ‘voguent entre les eaux ergodiques et statistiques’. Ces états propres ergodiques sont en particuliers les états sur réseau : pour les valeurs de N considérées ici, il y en a deux, correspondant à la même énergie (cf section 3.4.2). En fait, on dispose de bornes rigoureuses pour les ‘normes’ de ces états propres particuliers. Comme on l’a indiqué dans la section 4.2.1, ces ‘normes’ peuvent être calculées explicitement, puisqu’elles correspondent à celles des briques τ -déformées $H_{\chi(\tau)}$; on obtient alors des fonctions lisses par rapport à τ [3, appendice A]. D’un autre côté, on a vu dans la section 3.4.3 que pour une application S donnée, le paramètre τ des réseaux invariants par S est borné dans un compact de $\{\Im \tau > 0\}$, uniformément par rapport à N . Ceci montre donc que tous les états propres sur réseau de S ont des ‘normes’ bornées uniformément lorsque $N \rightarrow \infty$.

Par exemple, pour S_1 les valeurs de τ des réseaux invariants sont restreintes à $\sqrt{3/4} \leq \Im \tau \leq 3$, $-1/2 \leq \Re \tau \leq 1/2$; la norme L^2 et la moyenne géométrique des états propres sur réseau sont alors bornés par $1.0768 \leq \|H_{\text{rés}}\|_2 \leq 1.317$, $0.8435 \geq \text{GM}[H_{\text{rés}}] \geq 0.510$. Pour la norme L^2 , cet intervalle n’inclut pas la valeur du modèle statistique : il existera donc pour une infinité de valeurs de N des états propres de U_{S_1} plus ergodiques (au sens de cette norme) que la moyenne statistique, qui semble être également la moyenne sur tous les états propres (on distingue ces états sur réseau comme des points isolés en-dessous de la ligne statistique sur les figures 3a).

Nous discuterons plus précisément les grandes valeurs des ‘normes’, correspondant aux états à cicatrice dans la section 4.7.3. Retenons de ce qui précède les conclusions suivantes : pour les trois transformations étudiées, le modèle statistique est en très bon accord avec les valeurs moyennes des ‘normes’, ce qui montre que les fluctuations quantiques sont ‘incompressibles’, même dans la limite semi-classique. Autour de ces valeurs moyennes, les fluctuations des états propres individuels s’étalent sur des fenêtres plus ou moins larges : pour les deux chats S_1 et $S_1(\delta)$, les fenêtres semblent bornées uniformément par rapport à N , tandis que leur taille croît dans le cas du boulanger. Ceci montre bien que les états propres chaotiques conservent des caractéristiques assez variables, même à la limite semi-classique : on trouvera, pour tout N , des états très ergodiques, et des états aux fluctuations plus prononcées, ces deux types s’équilibrant pour

retrouver une moyenne donnée par le modèle statistique.

4.6 Équidistribution des constellations de zéros

Dans cette section, nous attaquons le problème de la caractérisation des constellations d'états propres chaotiques par une série de résultats dynamiques : nous montrons que la propriété de Schnirelman d'une suite d'états $\{\psi_h\}$ a comme conséquence l'équidistribution semi-classique des constellations correspondantes sur l'espace des phases, lorsque celui-ci est compact. Nous adaptons la preuve donnée dans [3, section 4.1] pour les états sur le tore (qui nous concernent au premier chef, puisque notre étude porte sur les applications du chat et du boulanger) aux autres espaces des phases bidimensionnels sur lesquels on sait définir une mécanique quantique et une représentation de Bargmann (v. section 2.1.2) : la sphère (sur laquelle on connaît des transformations chaotiques, du moins d'après les calculs numériques) et les surfaces de Riemann compactes de genre ≥ 2 , qui ont cependant moins d'intérêt physique ; néanmoins, nous les incluons ici comme des 'curiosités mathématiques'. La démonstration utilise uniquement les propriétés d'analyticité des fonctions de Husimi, plus exactement de leur *logarithme* $h_\psi(x)$ (défini, pour le tore, par l'équation (4.25)). Rappelons que h_ψ est le potentiel électrique associé à une densité de charges ponctuelles placées aux zéros, plongées dans une charge uniforme chargée de rétablir la neutralité électrique (sans cette neutralité, le potentiel ne peut être défini de façon univoque).

On note X l'espace des phases *compact* sur lequel on étudie les constellations (c'est-à-dire \mathbb{T}^2 , la sphère \mathbb{S}^2 ou une surface de Riemann X_g de genre g). Dans tous les cas, on sait construire des espaces d'états quantiques ψ_N représentés par des fonctions de Bargmann $\psi_N(z)$ ayant N zéros sur X , où $N \rightarrow \infty$ dans la limite semi-classique. Sur le tore, N est la dimension de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{N,\kappa}$ auquel appartient ψ_N ; dans le cas de la sphère, ψ_N appartient à un espace de dimension $N + 1$, la différence venant du fait que les zéros ne sont pas contraints sur la sphère, alors qu'ils le sont par (3.12) sur le tore. Sur X_g , la dimension dépend des conditions de périodicité des fonctions de Bargmann : pour des fonctions associées au caractère trivial, les fonctions de poids k ont $2k(g - 1)$ zéros, et la dimension de l'espace est g pour $k = 1$, $(2k - 1)(g - 1)$ pour $k \geq 2$ entier [56, p.80].

Théorème 3 *Pour toute suite de fonctions de Husimi $\{H_{\psi_N}\}$ convergeant au sens faible-* vers la mesure de Lebesgue \mathcal{L}_X dans la limite $N \rightarrow \infty$, la suite correspondante des densités de zéros $\{\rho_{\psi_N}\}$ converge également vers \mathcal{L}_X .*

La preuve de ce théorème utilise plusieurs ingrédients. Tout d'abord, on factorise de façon canonique la fonction de Husimi au moyen des 'briques élémentaires logarithmiques'. Nous employons les variables x, y et z, ξ pour désigner respectivement les points de X et les coordonnées complexes qui les représentent. On note génériquement x_l , $l = 1, \dots, N$ les zéros de H_{ψ_N} . Pour chaque point y de

la variété, on considère la fonction de Bargmann $\psi_y(z)$ ayant un unique zéro en $z = \xi$. La fonction de Husimi logarithmique $h_{\psi_y}(x)$ (normalisée à zéro par définition) sera notée sous la forme d'un noyau $h(y; x)$. A priori, celui-ci n'est symétrique en $x \leftrightarrow y$ que sur \mathbb{T}^2 et \mathbb{S}^2 , pour lesquels on dispose d'une formule explicite. Ce noyau permet de factoriser toute fonction de Husimi H_{ψ_N} :

$$h_{\psi_N}(x) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N h(x_l; x). \quad (4.29)$$

On a les formules suivantes pour les différentes géométries :

variété	\mathbb{T}^2	\mathbb{S}^2	X_g
mesure \mathcal{L}_X	$2d^2z$	$\frac{d^2z}{\pi(1+ z ^2)^2}$	$\frac{d^2z}{\pi(1- z ^2)^2}$
aire A_X	1	1	$g - 1$
laplacien	$2\partial\bar{\partial}$	$4\pi(1+ z ^2)^2\partial\bar{\partial}$	$4\pi(1- z ^2)^2\partial\bar{\partial}$
noyau $h(y; x)$	$\log \frac{ \chi(z-\xi) ^2}{\text{GM}[H_X] e^{2\pi z-\xi ^2}}$	$\log \frac{ z-\xi ^2}{(1+ z ^2)(1+ \xi ^2)} + 1$	$\log \frac{ \psi_y(z) ^2}{(1- z ^2)^{\frac{1}{g-1}}} + \text{cte}$

On a utilisé la notation $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$, $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Pour le tore et la sphère, les noyaux $h(y; \cdot)$ sont reliés les uns aux autres par le groupe de symétrie de la variété (resp. le groupe des translations sur \mathbb{T}^2 et des rotations sur \mathbb{S}^2). Par contre, pour une surface de genre $g \geq 2$, les noyaux $h(y; \cdot)$ n'ont pas de relation simple les uns par rapport aux autres, puisque le groupe d'automorphismes d'une telle surface est fini. La constante de normalisation peut donc dépendre de y dans ce cas, mais elle sera lisse par rapport à y .

Après avoir défini les noyaux $h(y; x)$, nous revenons au théorème ci-dessus. La stratégie en est assez simple, et utilise les propriétés analytiques du noyau. On remarque effectivement que $h(y; x)$ correspond (à une constante près) au noyau de l'opérateur Δ_X^{-1} , puisque on a toujours $\partial\bar{\partial} \log |\psi_y(z)|^2 = \pi\delta(z - \xi)$. Par conséquent :

$$\Delta_X h(y; x) = 4\pi(\delta(y; x) - \frac{1}{A_X}), \quad (4.30)$$

où $\delta(y; x)$ est le noyau de l'identité, A_X l'aire de X . Si maintenant on intègre ce noyau par rapport à une densité normalisée $\rho(x)$ sur X (plus précisément une mesure de Baire, c'est-à-dire une forme linéaire continue sur l'espace de Banach $C(X)$ des fonctions continues [109, p.109]), on obtient le potentiel $h_\rho(x)$.

$$h_\rho(x) = \int_X h(y; x) \rho(y) dy. \quad (4.31)$$

Dans le cas où ρ est une distribution de N points, h_ρ est la densité de Husimi logarithmique correspondante.

Remarques

Pour x fixé, la fonction $h(y; x)$ est semi-continue supérieurement (s.c.s.) [68], ce qui revient à dire qu'elle prend ses valeurs dans $[-\infty, \infty)$ et que les ensembles $\{y \in X \mid h(y; x) < a\}$ sont ouverts pour tout $a \in \mathbb{R}$. Une telle fonction de y a la propriété d'être la limite ponctuelle d'une suite décroissante de fonctions continues (cette propriété est évidente pour nos noyaux, qui n'ont qu'une unique singularité logarithmique, et sont lisses ailleurs). On peut alors définir l'intégrale ci-dessus pour tout x par passage à la limite, et la fonction h_ρ est automatiquement s.c.s. Dans tous les cas, la formule (4.30) s'intègre sans problème en :

$$\Delta_X h_\rho(x) = 4\pi(\rho(x) - \frac{1}{A_X}). \quad (4.32)$$

À partir de cette formule on déduit aisément la proposition suivante :

Proposition 3 *Soit ρ une mesure de Baire sur X telle que son potentiel $h_\rho(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_X dy \rho(y) h(y; x)$ soit constant presque partout (la constante est alors forcément nulle). Alors ρ est la mesure de Lebesgue \mathcal{L}_X sur X .*

Considérons maintenant les densités de zéros ρ_{ψ_N} associées aux fonctions de Husimi H_{ψ_N} : ces densités sont des mesures de Baire positives, normalisées, et définies sur un espace compact X . Par conséquent, elles admettent une valeur d'adhérence ρ_∞ (cf. le théorème de Banach–Alaoglu, [109, p.115]). Cette mesure ρ_∞ sera la limite faible-* d'une sous-suite $\{\rho_n\}$ de $\{\rho_{\psi_N}\}$. On peut alors définir le potentiel $h_\infty(x) \stackrel{\text{def}}{=} h_{\rho_\infty}(x)$ à partir de cette mesure limite. Le reste de la preuve consiste à montrer que si la suite $\{H_{\psi_N}\}$ (donc la suite extraite $\{H_n\}$) converge en mesure vers \mathcal{L}_X , alors h_∞ est forcément nul.

Pour cela, il faut relier assez précisément les potentiels $h_n \stackrel{\text{def}}{=} h_{\rho_n}$ au potentiel limite h_∞ . On se sert des propriétés de sous-harmonicité des potentiels h_ρ : l'équation (4.30) montre qu'en ajoutant au noyau $h(y; x)$ la fonction $2\pi|z|^2$ (pour le tore), $\log(1 + |z|^2)$ (pour la sphère), $\frac{1}{g-1} \log(1 - |z|^2)$ (pour une surface de genre g), on obtient un nouveau noyau $g(y; x)$ tel que les potentiels $g_\rho(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_X dy g(y; x) \rho(y)$ sont de laplacien positif ou nul, autrement dit sont des fonctions sous-harmoniques.

Pour le tore et les surfaces de genre ≥ 2 , les potentiels g_ρ ne sont plus monovalués, comme l'étaient les h_ρ , mais ils restent majorés uniformément tant que z reste dans un voisinage compact du domaine fondamental de X sur \mathbb{C} (et c'est dans un tel voisinage qu'on veut les estimer). En revanche, pour le cas de la sphère il faut restreindre z à un compact de \mathbb{C} pour que $g_\rho(z, \bar{z})$ soit majorée uniformément. On peut par exemple considérer le disque $D_2 = \{|z| \leq 2\}$. Pour avoir accès au reste de la sphère, on change de projection stéréographique, autrement dit de coordonnée complexe. Le choix le plus simple consiste à prendre la coordonnée $z' = 1/z$. Une simple manipulation montre alors que les potentiels $g'_\rho(x)$

définis à partir du noyau $g'(y; x) = h(y; x) + \log(1 + |z'|^2)$ sont sous-harmoniques et majorés uniformément sur $D'_2 = \{|z'|^2 \leq 2\}$. Il est clair que $\mathbb{S}^2 = D_2 \cup D'_2$.

Grâce à ces propriétés, le lemme de Hartog [3, lemme 1, p.20] [88, corollaire 1.32] s'applique aux potentiels (g_n, g_∞) (le cas échéant à (g'_n, g'_∞)), donc également aux potentiels (h_n, h_∞) . Précisément, pour toute fonction continue h_∞^* majorant h_∞ , pour tout $\epsilon > 0$, les potentiels h_n sont majorés sur tout X par $(h_\infty^* + \epsilon)$ dès que n est assez grand. En même temps, les h_n convergent vers h_∞ au sens faible, mais également au sens de la limite supérieure, pour presque tout point de X (sans oublier qu'ils ont de plus en plus de singularités logarithmiques à mesure que N croît). Grâce à la sous-harmonicité, on a donc réussi à coincer les h_n sous une enveloppe proche de h_∞ .

Si maintenant h_∞ n'est pas constante, on peut trouver deux sous-ensembles F_- et F_+ de mesures non nulles (v. les détails dans [3, section 4.1]), tels que le rapport

$$\frac{\int_{F_+} e^{N h_n(x)} dx}{\int_{F_-} e^{N h_n(x)} dx} = \frac{\int_{F_+} H_n(x) dx}{\int_{F_-} H_n(x) dx} \quad (4.33)$$

diverge lorsque $n \rightarrow \infty$, donc lorsque $N \rightarrow \infty$. On a donc une contradiction avec la propriété de Schnirelman de la sous-suite H_n . Il faut donc que h_∞ soit nul, donc, d'après la proposition 3 ci-dessus, que ρ_∞ soit la mesure de Lebesgue sur X .

Ce qui précède montre que toute valeur d'adhérence ρ_∞ de la suite $\{\rho_{\psi_N}\}$ est la mesure de Lebesgue. Cela implique que la suite $\{\rho_{\psi_N}\}$ converge vers cette limite. \square

4.6.1 Conséquences de l'équidistribution des zéros

Pour une suite d'états propres chaotiques $\{\psi_N\}$ sur le tore vérifiant la propriété de Schnirelman (comme par exemple les états propres du chat S_1 que nous avons calculés), le théorème ci-dessus peut s'exprimer au niveau des coefficients de Fourier des constellations :

$$\forall k \neq 0, \quad \rho_{N,k} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } N \rightarrow \infty. \quad (4.34)$$

Cependant, en utilisant les définitions (4.18, 4.25), on peut réécrire la densité de Husimi comme :

$$\hat{H}_N(x) = \exp \left(- \sum_{k \neq 0} \frac{N \rho_{N,k}}{\pi k^2} e^{2i\pi k \cdot x} \right). \quad (4.35)$$

Cette expression est formelle, car la série de Fourier ne converge pas en tout point. Cependant, on a l'impression qu'en tronquant celle-ci de façon astucieuse (pour l'instant mystérieuse), on aboutirait à un taux de décroissance mieux contrôlé des coefficients de Fourier.

Conjecture 2 *Pour toute suite d'états $\{\psi_N\}$ vérifiant la propriété de Husimi, les coefficients de Fourier des constellations correspondantes décroissent semi-classiquement en $\rho_{N,k} = o(N^{-1})$, sauf bien sûr si $k = 0$.*

Nous n'avons pas trouvé de contre-exemple à cette conjecture, mais la construction des états à réseaux déformés [3, §4.2.4] exhibe des suites $\rho_{N,k}$ à décroissance plus lente (du type $N^{1-\alpha}$, pour $\alpha > 0$) tels que les densités de Husimi soient piquées en l'origine.

Cas des constellations sur \mathbb{S}^2

Pour la sphère, il faut remplacer la transformation de Fourier par la décomposition en harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \phi)$ [124, section 2.1] ; une densité $\rho(\theta, \phi)$ s'écrira donc

$$\rho(\theta, \phi) = \sum_{l \geq 1} \sum_{m=-l}^l \rho_l^m Y_l^m(\theta, \phi), \quad (4.36)$$

$$\text{où } \rho_l^m = \int_{\mathbb{S}^2} d(\cos \theta) d\phi \overline{Y_l^m(\theta, \phi)} \rho(\theta, \phi). \quad (4.37)$$

L'équidistribution des constellations chaotiques sur la sphère s'écrit alors :

$$(l, m) \neq (0, 0) \implies \rho_{N,l}^m \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } N \rightarrow \infty \quad (4.38)$$

et on pressent un résultat similaire à celui énoncé dans la conjecture 2. Les constellations d'états propres chaotiques sur la sphère ont été étudiées en rapport avec les modèles de polynômes aléatoires [85, 31].

Apparemment, la seule propriété de Schnirelman ne permet pas d'étudier les moments d'ordre supérieur des constellations, par exemple les corrélations à deux zéros. On peut en effet construire des états ψ_N vérifiant asymptotiquement la propriété de Schnirelman, mais pour lesquels les zéros sont fortement dégénérés [3, section 4.2.3] ; on a du mal à concilier ceci avec la propriété de 'répulsion' entre les zéros voisins, constatée numériquement pour les états propres chaotiques ; pour le moment, la compréhension de cette répulsion ne peut se faire que par le biais des modèles de vecteurs aléatoires, et non par des arguments dynamiques découlant directement de l'ergodicité classique (ou d'une propriété chaotique).

Avant de passer à l'étude de ce modèle statistique, nous évoquons les conséquences de l'équidistribution des zéros au niveau de la fonction de Bargmann, et en particulier au niveau de sa phase (son module est trivialement relié à la fonction de Husimi, dont on a déjà une estimation).

4.6.2 Phase de $\psi(z)$

On sait remonter de la constellation ρ_ψ à la densité de Husimi logarithmique h_ψ , qu'on peut écrire (à un terme générique près), comme la partie réelle du

logarithme de la fonction de Bargmann. En dérivant $h_\psi(z, \bar{z})$ par rapport à la variable z , on obtient la dérivée logarithmique de $\psi(z)$, qui est une fonction méromorphe. Dans le cas du tore, on a

$$h_\psi(z, \bar{z}) = N^{-1} \log |\psi(z)|^2 - 2\pi z \bar{z} \quad (4.39)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} h_\psi(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi N} \frac{\psi'}{\psi}(z) - \bar{z} \quad (4.40)$$

$$= -\frac{i}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k \neq 0} \frac{\rho_{\psi,k}}{k_q - ik_p} e^{2i\pi k \cdot x}. \quad (4.41)$$

On a utilisé la relation linéaire (4.25) entre les coefficients de Fourier de h_ψ et ρ_ψ . Comme les coefficients individuels convergent vers 0 dans la limite semi-classique, cette somme va être ‘petite’, dans un certain sens (elle ne peut l’être uniformément à cause des pôles de ψ'/ψ). En fait, on peut régulariser cette série de Fourier en convoluant $\partial_z h_\psi$ par une gaussienne de largeur arbitraire. Lorsque la largeur de la gaussienne tend vers zéro, ce lissage ne converge vers l’identité qu’au sens L^s , pour $s < 2$. On ne pourra donc espérer une meilleure estimation de ψ'/ψ que pour cette topologie. Une fois régularisée, la série de Fourier ci-dessus converge absolument, et on peut la tronquer en contrôlant le reste. Enfin, on applique la propriété d’équidistribution $\rho_{N,k} \rightarrow 0$ sur les coefficients de la série tronquée. La preuve est exposée en détail dans la partie 4.3 de [3]. Elle aboutit au théorème suivant :

Théorème 4 *Soit $\{\psi_N\}$ une suite d’états ($\psi_N \in \mathcal{H}_{N,\kappa}$) dont les constellations ρ_N sont équidistribuées dans la limite semi-classique. On a alors, pour tout $1 \leq s < 2$, l’estimation suivante :*

$$\left\| \frac{1}{2\pi N} \frac{\psi'_N}{\psi_N}(z) - \bar{z} \right\|_s \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } N \rightarrow \infty. \quad (4.42)$$

Cette estimation conduit à une sorte de formule WKB ayant une signification *purement formelle*, valable pour toute fonction propre chaotique, indépendamment des spécificités de la transformation quantique.

En effet, en représentation de Schrödinger, il est naturel de considérer la quantité $\pi_\psi(q) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hbar}{i} \frac{\psi'}{\psi}(q)$ comme un *moment quantique local* de l’état ψ , c’est-à-dire l’analogue quantique du moment p conjugué à la position q . Pour s’en convaincre, on peut remarquer que la moyenne de l’impulsion \hat{p} sur cet état ψ vaut

$$\langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle = \int dq (\overline{\psi(q)} \psi(q)) \pi_\psi(q). \quad (4.43)$$

Comme $\bar{\psi}(q)\psi(q)$ est la densité de probabilité de présence au point q , la formule ci-dessus montre que l’impulsion totale est représentée par une moyenne sur l’impulsion locale $\pi_\psi(q)$, pondérée par la densité moyenne de particules. D’ailleurs, si $\psi_E(q)$ est donné par une formule *WKB*, on aura à l’ordre dominant $\pi_\psi(q) \sim p_E(q)$, l’impulsion classique de la particule d’énergie E à la position q .

Comme la transformation de Bargmann n'est rien d'autre qu'une rotation symplectique complexe, on peut naturellement y étendre les notions ci-dessus. On définit donc $\pi_\psi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \hbar \frac{\psi'}{\psi}(z)$ le moment quantique local de ψ au point z . Classiquement, le moment conjugué à z est \bar{z} (puisque la rotation symplectique fait passer des variables (q, p) aux variables (z, \bar{z})). Cependant, on ne peut pas avoir l'égalité $\pi_\psi(z) = \bar{z}$ dans un ouvert de \mathbb{C} , par analyticité de π_ψ (en dehors des zéros de ψ).

Cependant, dans le cas d'une dynamique intégrable d'hamiltonien H_o , les solutions *WKB* d'énergie E en représentation de Bargmann sont construites en résolvant l'équation de Hamilton–Jacobi $H_o(z, \phi'(z)) = E$ en l'action $\phi(z)$ (v. la section 2.2.2 et [125]). Hors du voisinage (de largeur $\sim \hbar$) des lignes où s'accumulent les zéros, le moment local $\pi_\psi(z)$ de la solution doit être proche d'une solution $\phi'_E(z)$, dans la limite $\hbar \rightarrow 0$. Or, il se trouve que sur la surface réelle d'énergie classique Σ_E , $\phi'_E(z)$ vaut exactement \bar{z} , puisque Σ_E est définie par $\{z \in \mathbb{C} \mid H_o(z, \bar{z}) = E\}$. On a donc, au sens de la convergence ponctuelle :

$$\text{dans la région classiquement autorisée, } \pi(z) \sim \bar{z} \text{ quand } \hbar \rightarrow 0. \quad (4.44)$$

Dans le cas chaotique, le théorème 4 ci-dessus montre qu'on a une identité analogue, si ce n'est que la région autorisée est le tore tout entier, donc un espace de dimension 2 sur lequel l'asymptotique ne peut pas être ponctuelle : elle n'est que L^s , pour $s < 2$. Néanmoins, pour un état propre chaotique ψ particulier, on s'aperçoit (v. fig. 4.7) que l'accord entre $\pi(z)$ et \bar{z} est bon sur tout $T_{\mathbb{C}}$, excepté aux pôles de $\pi(z)$. En oubliant ces pôles, il est totalement impossible de distinguer des  tats ergodiques,   cicatrice, sur réseau, uniquement par l'apparence globale de $\pi(z)$ sur $T_{\mathbb{C}}$. Cette fonction constitue donc une caractéristique visiblement universelle des fonctions propres chaotiques. On ne peut alors résister à l'envie de représenter ces dernières par l'expression 'WKB' formelle

$$\text{“ } \psi(z) \approx e^{\frac{1}{\hbar} \int^z \bar{z}' dz' \text{ ”} \quad (4.45)$$

L'intégrale ci-dessus nécessite bien sûr une certaine interprétation. Sa partie réelle, correspondant au module $|\psi(z)|$, est bien définie, puisque la forme $\Re(\bar{z}' dz') = \frac{1}{4}d(q^2 + p^2)$ est exacte. L'équation ci-dessus signifie donc que $|\psi(z)| \approx e^{\pi N x^2/2}$, ce qui revient en fait à l'équidistribution asymptotique de la densité de Husimi $H_\psi(x) \approx 1$.

Au contraire, la partie imaginaire de $\log \psi(z)$, c'est-à-dire la phase de $\psi(z)$, ne peut être estimée correctement à partir de la formule ci-dessus, puisque la forme $\Im(\bar{z}' dz') = (pdq - qdp)/2$ n'est pas fermée. Autrement dit, l'équation (4.44) se traduit en termes de $\arg \psi(z)$ par l'équation suivante :

$$\vec{\nabla} \arg \psi(z) \sim \begin{pmatrix} \pi N p \\ -\pi N q \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$

qui ne peut s'intégrer car le membre de droite a un rotationnel valant identiquement $-2\pi N$. Pour pouvoir néanmoins restaurer cette équivalence dans un sens plus faible, la phase doit présenter une distribution très dense de *dislocations*, c'est-à-dire de points autour desquels elle fait un tour de 2π . En clair, l'équidistribution des zéros de $\psi(z)$ implique une arborescence de la phase typique des états propres chaotiques, présentant des dislocations uniformément réparties sur le tore (cf. fig. 4.7).

4.7 Corrélations entre zéros. Facteurs de forme

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, la propriété de Schnirelman, qui est notre seul lien entre la dynamique classique ergodique et les états propres, ne peut expliquer la 'répulsion' entre les zéros qu'on observe numériquement, et qui est responsable de la certaine rigidité des constellations. On a déjà remarqué que les 'normes' de fluctuations des densités de Husimi des états propres correspondaient bien (en moyenne) aux valeurs statistiques prédites par les modèles de vecteurs aléatoires dans $\mathcal{H}_{N,\kappa}$. Il est donc naturel de s'intéresser aux constellations de ces états aléatoires, et de les comparer à celles des états chaotiques; *a priori*, les 'normes' et les constellations pourraient être décorrélées, c'est-à-dire que le bon accord entre les deux familles d'états pourrait se faire au niveau des 'normes' sans pour autant que les constellations aient des propriétés similaires. Il s'avère néanmoins que la répulsion entre les zéros d'états chaotiques correspond très précisément aux calculs effectués dans les modèles aléatoires. Cet accord avait déjà été remarqué au niveau des fonctions de corrélation à deux points $R(x, y)$, pour des états propres sur la sphère [85, 31]. Nous préférons faire les comparaisons dans l'espace de Fourier, c'est-à-dire que nous comparons plutôt les facteurs de forme (4.23) des constellations au modèle statistique.

4.7.1 Méthodes et résultats statistiques

Avant de présenter les données numériques, nous présentons rapidement les méthodes utilisées pour calculer les facteurs de forme statistiques. Les résultats sont donnés plus en détail dans [3, section 5]. Nous nous restreignons essentiellement au modèle le plus simple, celui du vecteur aléatoire complexe sans symétrie, défini dans (4.2).

Nous avons déjà expliqué sommairement comment obtenir les valeurs typiques des 'normes' dans ce formalisme statistique. Il suffit en fait de calculer la valeur moyenne de $H_\psi(x)$, pour tout x . Comme on travaille avec des variables gaussiennes, la distribution de la fonction de Bargmann est au point z simplement donnée par

$$\mathcal{D}(\psi_z) = \frac{1}{\pi \sigma_z} e^{-\frac{|\psi_z|^2}{\sigma_z}}, \quad (4.47)$$

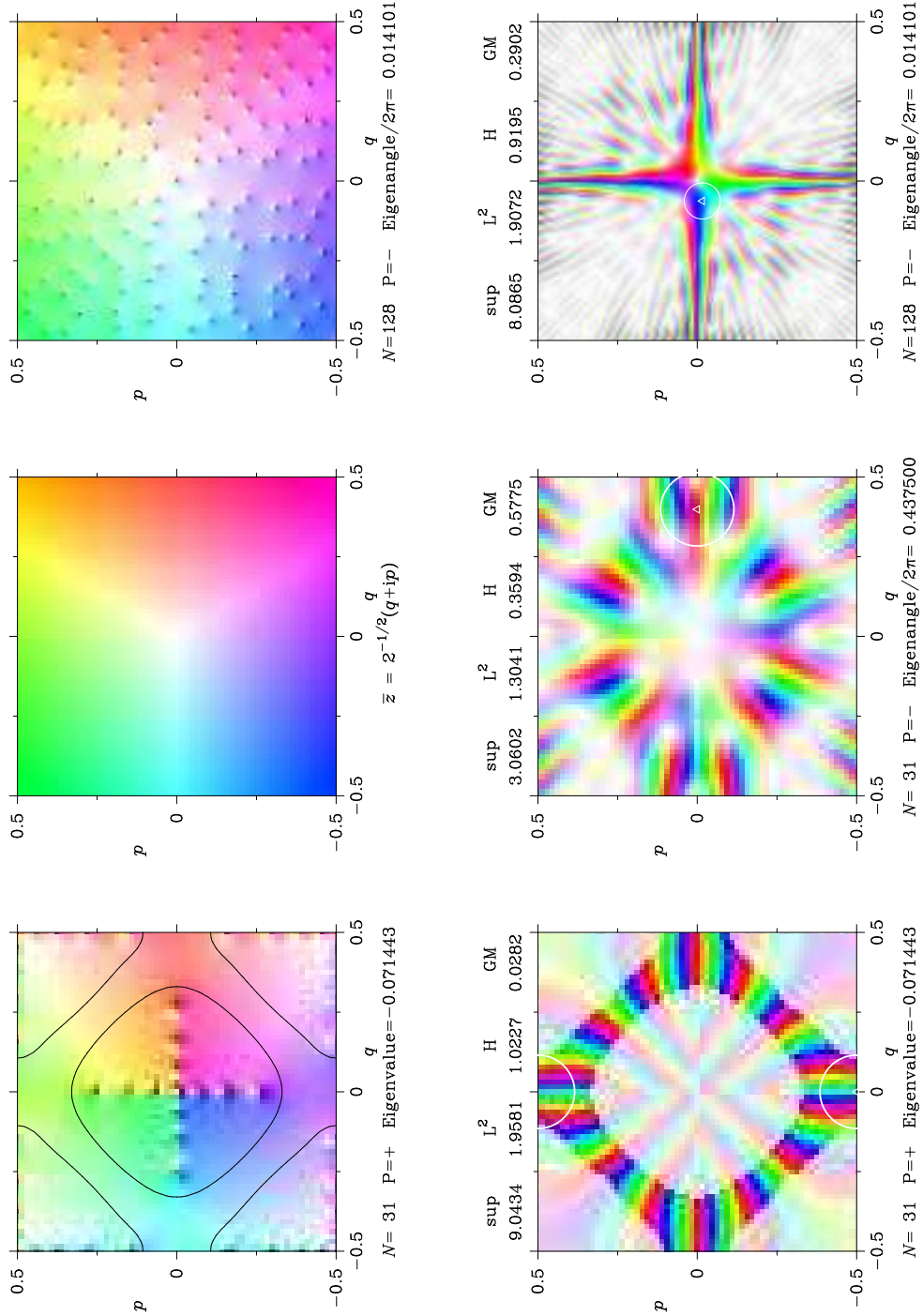


FIG. 4.7 – Gauche : représentation du moment quantique local $\pi_\psi(z) = \hbar \psi' / \psi(z)$: la couleur représente la phase, l'intensité le module. En haut : l'état propre du boulanger représenté en haut de la figure 4.2. Au centre : la fonction \bar{z} . En bas : le 15e état propre de l'hamiltonien de Harper ($N=31$) représenté sur la figure 2.3 (les lignes entourent la région où $H_\psi(x) \geq \|H_\psi\|_\infty/10$). Droite : trois fonctions de Bargmann $\psi(z)$, avec les mêmes conventions de représentation. En haut, l'état propre du boulanger. Au centre, un état propre de U_{S_1} . En bas, l'état propre de H_{Harper} ; l'intensité est codée de façon binaire, par rapport au seuil indiqué à gauche.

$$\text{avec la variance } \sigma_z = \left\langle |\psi_z|^2 \right\rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |\langle z | q_j \rangle_{N,0}|^2. \quad (4.48)$$

(Dans l'équation ci-dessus et dans la suite, on utilisera la notation abrégée $\psi_z \stackrel{\text{def}}{=} \psi(z)$). Cette variance est donnée par la norme de l'état cohérent $|z\rangle_{N,0}$, calculée en (3.33). On aboutit alors à une distribution de la fonction de Husimi quasiment uniforme sur le tore :

$$\mathcal{D}(H(x)) = \frac{1}{\tilde{\sigma}_x} e^{-H(x)/\tilde{\sigma}_x} dH(x), \quad \text{avec } \tilde{\sigma}_x = \theta_3(\pi N q | iN/2) \theta_3(\pi N p | iN/2). \quad (4.49)$$

Cette variance converge donc vers 1 exponentiellement et uniformément sur \mathbb{T}^2 , à la limite semi-classique. Pour N fini, cependant, on observe des fluctuations périodiques qui peuvent s'expliquer par le fait que les états de $\mathcal{H}_{N,\kappa}$ ne sont invariants que par les translations discrètes de pas $1/N$. Si on tient compte de ces fluctuations exponentielles, on obtient alors des corrections aux valeurs typiques des normes données dans le tableau 4.1. Seule la norme sup des états aléatoires ne peut être estimée par ce formalisme, et réclame des méthodes plus géométriques [3, appendice C].

Passage à la statistique des zéros

Nous décrivons la méthode utilisée par Hannay [66] pour extraire de la loi de ψ les fonctions de corrélations à n points des zéros. Cette méthode utilise les propriétés des variables aléatoires gaussiennes : en particulier, la distribution de toute quantité linéaire en ψ est une gaussienne donnée par la matrice de covariance correspondante. Commençons par la densité moyenne de zéros, donnée par

$$\rho(z) \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle N^{-1} \sum_{l=1}^N \delta_{\text{per}}(z - Z_l) \right\rangle_N, \quad (4.50)$$

où les Z_l sont les N zéros de la fonction de Bargmann aléatoire $\psi(z)$, l'indice N à droite du crochet signifiant qu'on prend la moyenne sur des vecteurs aléatoires dans $\mathcal{H}_{N,0}$. On peut réécrire cette densité en utilisant la distribution conjointe de $\mathcal{D}(\psi_z, \psi'_z)$ et les propriétés de la fonction delta :

$$\rho(z) = N^{-1} \int \int d^2\psi_z d^2\psi'_z \mathcal{D}(\psi_z, \psi'_z) \delta(\psi_z) |\psi'_z|^2. \quad (4.51)$$

Il suffit donc d'écrire ce que vaut cette distribution conjointe. En utilisant la matrice de covariance

$$M_z \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \left\langle \overline{\psi_z} \psi_z \right\rangle_N & \left\langle \overline{\psi'_z} \psi_z \right\rangle_N \\ \left\langle \overline{\psi_z} \psi'_z \right\rangle_N & \left\langle \overline{\psi'_z} \psi'_z \right\rangle_N \end{pmatrix}, \quad (4.52)$$

la distribution conjointe au point z vaut

$$\mathcal{D}(\psi_z, \psi'_z) = \frac{1}{\pi^2 \det M_z} \exp \left\{ -(\bar{\psi}_z, \bar{\psi}'_z) M_z^{-1} \begin{pmatrix} \psi_z \\ \psi'_z \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.53)$$

Les éléments de matrice de M_z se calculent simplement à partir de la loi (4.47). Il suffit en fait de connaître la variance σ_z , et de dériver celle-ci par rapport à z ou \bar{z} . On obtient pour $\rho(z)$ l'expression

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \frac{1}{N\pi} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log \langle \psi_z \bar{\psi}_z \rangle_N \\ \implies \rho(x) &\sim 1 - \frac{\pi N}{\sinh(\pi N/2)} [\cos(2\pi Nq) + \cos(2\pi Np)] \quad \text{lorsque } N \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.54)$$

(le facteur $1/2$ entre $\rho(z)$ et $\rho(x)$ est dû aux relations entre métriques $d^2x = 2 d^2z$). Ceci montre que la distribution des zéros du modèle statistique est uniforme sur le tore à la limite semi-classique, les corrections périodiques exponentiellement petites à N fini étant dues aux corrections correspondantes de la variance de $\psi(z)$. À ces corrections près, on retrouve donc la même uniformité que pour les états sur la sphère ou la pseudosphère [84]. Sous cet angle, le modèle statistique est compatible avec les résultats dynamiques concernant les fonctions propres chaotiques.

Si on considère maintenant un ensemble de vecteurs aléatoires *pairs*, qu'on obtient à partir des vecteurs aléatoires ci-dessus par $\psi^{\text{pair}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi(z) + \psi(-z))$, on peut utiliser le même formalisme, si ce n'est que la fonction de corrélation de base sera modifiée :

$$\langle \bar{\psi}(z) \psi(z) \rangle_N^{\text{pair}} = \langle \bar{\psi}(z) \psi(z) \rangle_N + \langle \bar{\psi}(z) \psi(-z) \rangle_N. \quad (4.55)$$

En négligeant les corrections exponentielles, on trouve la distribution suivante, valable asymptotiquement pour tout $|q| \leq 1/4$, $|p| \leq 1/4$:

$$\rho^{\text{pair}}(x) \sim \tanh(\pi N x^2) + \frac{\pi N x^2}{\cosh^2(\pi N x^2)}. \quad (4.56)$$

La densité asymptotique dans le reste du tore est obtenue par périodicité : $\rho^{\text{pair}}(q + 1/2, p) = \rho^{\text{pair}}(q, p + 1/2) = \rho^{\text{pair}}(q, p)$. On trouve donc une chute de densité autour des points de symétrie.

Par contre, le modèle de vecteurs aléatoires *réels* réclame un peu plus de travail [107]. En effet, on perd l'invariance par rotation complexe $\psi \mapsto e^{i\theta} \psi$ des distributions précédentes, de sorte que les variables aléatoires sont maintenant $\Re \psi_z$, $\Re \psi'_z$, $\Im \psi_z$, $\Im \psi'_z$; la matrice de covariance remplaçant M_z dans la distribution conjointe (4.53) sera donc de rang 4×4 . Les calculs menant à $\rho(z)$ seront donc plus compliqués, et font clairement ressortir les axes de symétrie (les

axes $\{\Im z = 0\}$ et $\{\Im z = 1/2\}$, auxquels il faut ajouter les axes $\{\Re z = 0\}$ et $\{\Re z = 1/2\}$ si on se restreint en plus à des vecteurs pairs). On trouve alors une distribution uniforme $\rho(z) \sim 1$ loin de ces axes (à une distance $> 1/\sqrt{N}$), tandis que cette densité décroît linéairement quand on s'en rapproche; ce défaut de zéros hors des axes est compensé par une distribution singulière de zéros placés exactement dessus (la proportion de ces zéros-ci est asymptotiquement $\frac{4}{\sqrt{\pi N}}$ pour le modèle des vecteurs pairs réels). On trouve alors une distribution non-isotrope, mais qui converge encore vers 1 au sens de la mesure, lorsque $N \rightarrow \infty$. Ce type de distribution avait déjà été obtenu dans l'étude des polynômes aléatoires réels [31, 53, 108, 93] utilisés pour décrire les états propres chaotiques sur \mathbb{S}^2 , appelés polynômes aléatoires $SU(2)$ à cause de l'invariance de l'ensemble statistique par rotation (cette invariance impose les variances relatives des coefficients).

Les fonctions de corrélation intervenant dans nos matrices de covariance sont quasiment identiques à celles qu'on trouve pour les états aléatoires réels sur la sphère, donc nos résultats sur la densité sont localement identiques à ceux obtenus dans cette géométrie. Seules les contraintes macroscopiques (par exemple, périodicité de $\rho(z)$ par rapport au tore) sont spécifiques à la densité sur le tore. On retrouve donc, au niveau de la densité moyenne de zéros, l'universalité des propriétés locales évoquée à la fin de la section 4.2.1.

Dérivée de $\psi(z)$ aux zéros

La statistique de la fonction scalaire $f(z_l) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi N} |\psi'(z_l)|^2 e^{-2\pi N |z_l|^2}$, pour z_l un zéro de ψ est obtenue assez simplement à partir des résultats précédents. On veut mesurer exactement, pour tout $f > 0$, la quantité

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f) &= \left\langle \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \delta(f(Z_l) - f) \right\rangle_N \\ &= 2\pi \int_{T_{\mathbb{C}}} 2d^2 z \left\langle \delta(\psi(z)) |\psi'(z)|^2 \delta(|\psi'(z)|^2 - f 2\pi N e^{2\pi N |z|^2}) e^{2\pi N |z|^2} \right\rangle_N. \end{aligned} \quad (4.57)$$

À partir de là, il suffit d'insérer la distribution $\mathcal{D}(\psi_z, \psi'_z)$, et intégrer en ψ_z et ψ'_z . On trouve alors

$$\mathcal{D}(f) = \int_{T_{\mathbb{C}}} 2d^2 z f \frac{2e^{4\pi N |z|^2}}{\langle \overline{\psi_z} \psi_z \rangle_N^2 \rho(z)} \exp \left\{ -f \frac{2e^{2\pi N |z|^2}}{\langle \overline{\psi_z} \psi_z \rangle_N \rho(z)} \right\}. \quad (4.58)$$

En négligeant les corrections exponentiellement petites en N , on voit que l'intégrand est indépendant de z , et vaut $f e^{-f}$.

Fonction à deux zéros. Facteurs de forme

Cette universalité se retrouve également dans les moments d'ordre supérieur de la distribution de zéros. Nous nous sommes contentés de la fonction de corrélation

à deux zéros, car celle-ci fournit déjà des prédictions intéressantes sur la statistique des coefficients de Fourier $\rho_{\psi,k}$, qui constitue notre objectif principal.

Nous n'avons explicitement calculé cette fonction que dans le modèle de vecteurs complexes sans parité, qui se traite encore assez simplement, du fait de l'homogénéité et l'isotropie de la distribution. Il suffit pour cela d'utiliser la même méthode que pour la fonction à un point (cette méthode permet en principe d'obtenir les fonctions à n points, mais les calculs effectifs deviennent vite insurmontables). Reprenant la définition de la fonction de corrélation $R_\psi(x, y)$ donnée en (4.22), sa moyenne $R(z, \xi)$ sur l'ensemble aléatoire est donnée (pour $z \neq \xi$ les variables complexes correspondant à x, y) par

$$R(z, \xi) = N^{-2} \int d\psi_z d\psi_\xi d\psi'_z d\psi'_\xi \mathcal{D}(\psi_z, \psi_\xi, \psi'_z, \psi'_\xi) \delta(\psi_z) |\psi'_z|^2 \delta(\psi_\xi) |\psi'_\xi|^2. \quad (4.59)$$

La distribution conjointe $\mathcal{D}(\psi_z, \psi_\xi, \psi'_z, \psi'_\xi)$ est gaussienne, de matrice de covariance similaire à $M(z)$:

$$M(z, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \langle \bar{\psi}_z \psi_z \rangle_N & \langle \bar{\psi}_\xi \psi_z \rangle_N & \langle \bar{\psi}'_z \psi_z \rangle_N & \langle \bar{\psi}'_\xi \psi_z \rangle_N \\ \langle \bar{\psi}_z \psi_\xi \rangle_N & \langle \bar{\psi}_\xi \psi_\xi \rangle_N & \langle \bar{\psi}'_z \psi_\xi \rangle_N & \langle \bar{\psi}'_\xi \psi_\xi \rangle_N \\ \langle \bar{\psi}_z \psi'_z \rangle_N & \langle \bar{\psi}_\xi \psi'_z \rangle_N & \langle \bar{\psi}'_z \psi'_z \rangle_N & \langle \bar{\psi}'_\xi \psi'_z \rangle_N \\ \langle \bar{\psi}_z \psi'_\xi \rangle_N & \langle \bar{\psi}_\xi \psi'_\xi \rangle_N & \langle \bar{\psi}'_z \psi'_\xi \rangle_N & \langle \bar{\psi}'_\xi \psi'_\xi \rangle_N \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

Les fonctions de corrélation $\langle \bar{\psi}_z \psi_\xi \rangle_N$ sont données par les recouvrements entre les états cohérents du tore,

$$\langle \bar{\psi}_z \psi_\xi \rangle_N = N^{-1} {}_{N,0} \langle \xi | z \rangle_{N,0}. \quad (4.61)$$

Ces recouvrements ont été calculés en (3.31), et leur développement asymptotique pour un écart $|z - \xi| < 1/2\sqrt{2}$, donné dans (3.32), amène :

$$\langle \bar{\psi}_z \psi_\xi \rangle_N \sim e^{2\pi N \xi \bar{z}} \quad \text{lorsque } N \rightarrow \infty, \quad \text{uniformément pour } |z - \xi| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} - \epsilon. \quad (4.62)$$

On utilisera toujours cette approximation, ce qui signifie qu'on ne cherchera pas à décrire les fluctuations exponentielles de période $1/N$ qu'on trouve dans la fonction à un point. Par conséquent, on pourra utiliser directement les calculs de Hannay, qui sont valables pour le même type de corrélations logarithmiques. Il s'agira ensuite de rendre les résultats périodiques par rapport à \mathbb{T}^2 . Nous décrivons succinctement les étapes finales du calcul.

Tout d'abord, il est clair que l'intégrale donnant $R(z, \xi)$ ne dépend que du bloc 2×2 inférieur droit de $M(z, \xi)^{-1}$. On note ce bloc $m(z, \xi)^{-1}$, et d'après l'estimation (3.32) c'est une matrice hermitienne définie positive. À partir de là, la manière la plus simple d'extraire la moyenne $R(z, \xi)$ de cette distribution gaussienne consiste à rajouter des termes de source dans la distribution, autrement

dit d'utiliser la fonction génératrice

$$Z(x, \xi; \mu) = \frac{1}{\pi^4 \det M(z, \xi)} \int d^2 \psi'_z d^2 \psi'_\xi e^{-(\bar{\psi}'_z, \bar{\psi}'_\xi) m(z, \xi)^{-1} {}^t(\psi'_z, \psi'_\xi)} e^{(\bar{\mu}_z \psi'_z + \bar{\mu}_\xi \psi'_\xi + \text{c.c.})}. \quad (4.63)$$

En dérivant cette fonction par rapport aux ‘courants’ μ , $\bar{\mu}$, on fait descendre les termes qu’on veut inclure dans la moyenne; après avoir dérivé, on pose $\mu = 0$ pour récupérer la moyenne. On obtient, par des manipulations standard :

$$Z(x, \xi; \mu) = \frac{\det m(z, \xi)}{\pi^2 \det M(z, \xi)} e^{-(\bar{\mu}_z, \bar{\mu}_\xi) m(z, \xi) {}^t(\mu_z, \mu_\xi)} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R(z, \xi) &= N^{-2} \frac{\partial^4}{\partial \mu_z \partial \bar{\mu}_z \partial \mu_\xi \partial \bar{\mu}_\xi} Z(z, \xi, \mu) \Big|_{\mu=0} \\ &= \frac{1}{(\pi N)^2} \frac{\det m(z, \xi) \text{per } m(z, \xi)}{\det M(z, \xi)}, \end{aligned} \quad (4.65)$$

où on utilise la notation de *permanent* $\text{per } M \stackrel{\text{def}}{=} \sum_P M_{j,P_j}$.

Une fois cet arsenal algébrique débobiné, il ne reste qu’à calculer explicitement les déterminants et permanents. $R(z, \xi)$ est alors une fonction rationnelle des corrélations $\langle \bar{\psi}_z \psi_\xi \rangle_N$ et de leurs dérivées. Pour des points x, y assez proches pour pouvoir appliquer l’approximation (4.62), la fonction à deux points est donnée par une fonction d’échelle [66] :

$$R(x, y) \sim g(\sqrt{\pi N/2} |x - y|) \quad \text{lorsque } N \rightarrow \infty, \quad (4.66)$$

$$\text{où } g(r) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\sinh^2 r^2 + r^4) \cosh r^2 - 2r^2 \sinh r^2}{\sinh^3 r^2}. \quad (4.67)$$

Cette fonction $g(r)$ (v. [3, fig. 6, gauche]) montre donc une répulsion quadratique ($g(r) \sim r^2$) sur une distance $\lesssim N^{-1/2}$, suivie d’une fonction plate à longue distance, indiquant une décorrélation des zéros. Cette prédiction a été comparée par Lebœuf et Shukla [85] aux données numériques provenant d’états propres de systèmes de spins sur la sphère (plus précisément, des transformation de spin pulsé, qui sont chaotique pour les valeurs de paramètres utilisées). En prenant la moyenne sur tous les états propres, ils obtiennent un excellent accord pour $R(x, y)$. Afin d’étudier ce qui se passe au niveau des états propres individuels, nous avons eu recours à la transformée de Fourier de cette fonction $R(x, y)$ (en effet, on peut difficilement comparer la courbe statistique lisse $R(x, y)$ à la distribution de pics $R_\psi(x, y)$, tandis que les coefficients de Fourier se prêtent à comparaison directe).

Facteurs de forme

Comme nous l’avons déjà indiqué dans la section 4.4.2, la fonction à deux points $R(x, y)$ du modèle aléatoire mène directement, par transformée de Fourier,

au facteur de forme $\langle |\rho_k|^2 \rangle_N$. Cette moyenne quadratique fournit une estimation des valeurs typiques des coefficients $\rho_{\psi,k}$ (en effet, dans le modèle sans symétrie étudié jusqu'à présent, les coefficients de Fourier ont une moyenne nulle, donc la première estimation provient des seconds moments). Ce type de facteur de forme est également utilisé pour analyser les spectres de systèmes chaotiques, en relation avec les modèles de matrices aléatoires [21].

En utilisant l'isotropie et l'homogénéité asymptotiques de $R(x, y)$ (4.66), on se ramène simplement à une expression intégrale pour le facteur de forme, par le biais d'une fonction d'échelle :

$$\langle |\rho_k|^2 \rangle_N \sim \delta_{k,0} + N^{-1} F_2(|k|/\sqrt{N}) \quad (4.68)$$

$$\text{où} \quad F_2(\kappa) = -2\pi\kappa^2 \int_0^\infty y J_2(\kappa\sqrt{8\pi y}) (1 - \coth y) dy \quad (4.69)$$

$$= \pi^2 \kappa^4 \sum_{n \geq 0} \frac{(-\pi)^n \zeta(n+3)}{n!} \kappa^{2n}. \quad (4.70)$$

J_2 est la fonction de Bessel, et $\zeta(n)$ la fonction zeta de Riemann $\zeta(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j>0} j^{-n}$. La fonction d'échelle $F_2(\kappa)$ est dessinée sur la figure 6b (droite) de [3] : elle montre une dépression, ou cuvette, pour les coefficients de Fourier à grande longueur d'onde ($|k| \lesssim \sqrt{N}$), avant de retrouver une moyenne $\langle |\rho_k|^2 \rangle_N \sim N^{-1}$ pour les grandes valeurs de k (cette limite est simplement due au théorème de Riemann-Lebesgue [111, p.103] appliqué à la formule 4.23).

Nous montrons ci-dessous comment cette forme en cuvette peut être reliée à la répulsion entre zéros proches. Cette assertion est contraire à l'intuition qui associe le comportement d'une fonction près de l'origine à la décroissance à l'infini de sa transformée de Fourier. Lorsque cette décroissance est en *loi de puissance*, elle a en effet comme conséquence une singularité de la fonction en 0 (v. par exemple le facteur de forme des valeurs propres de matrices aléatoires [35]). Dans le cas présent, la décroissance de $g(x) - 1$ à l'infini est *gaussienne* : à elle seule, cette décroissance ne fournit aucune information sur le comportement de $F_2(\kappa)$ près de l'origine ; elle implique en revanche que F_2 est analytique pour $\kappa \in \mathbb{C}^2$.

Pour une distribution de points totalement décorrelés (distribution de Poisson), on trouve $\langle |\rho_k|^2 \rangle_N = \delta_{k,0}(1 - N^{-1}) + N^{-1}$, c'est-à-dire un spectre 'plat', provenant de la fonction à deux points $R_{\text{poiss}}(x, y) \equiv 1 - N^{-1}$. La fonction $F_{2,\text{poiss}}(\kappa)$ vaut donc identiquement 1.

Dans le cas des zéros, on a les relations suivantes entre $g(x)$ et $F_2(\kappa)$:

$$g(0) = 0 \iff \int_{\mathbb{R}^2} (F_2(\kappa) - 1) d^2\kappa = -1.$$

Comme d'autre part on sait (par Riemann-Lebesgue) que $F_2(\kappa) - 1 \rightarrow 0$ en $\kappa \rightarrow \infty$, la valeur -1 de l'intégrale ci-dessus n'est possible que par la présence de valeurs négatives pour $F_2(\kappa) - 1$ à distance finie. Enfin, la condition de normalisation $1 = \rho_0 \implies \int_{\mathbb{R}^2} (g(x) - 1) d^2x = -1$ implique $F_2(\kappa) \rightarrow 0$ lorsque $\kappa \rightarrow 0$, donc

il est raisonnable de penser que les valeurs négatives de $F_2 - 1$ correspondent à une cuvette proche de l'origine. On peut donc relier 'avec les mains' répulsion des zéros et cuvette du facteur de forme près de $k = 0$.

Pour connaître plus précisément le développement de Taylor de $F_2(\kappa)$ en l'origine, on a besoin des premiers moments de $g(x)$. On trouve alors (grâce à une annulation 'miraculeuse' du moment d'ordre 2) un comportement *quadratique* des coefficients de Fourier de petit k :

$$\sqrt{\langle |\rho_k|^2 \rangle_N} \sim \pi \sqrt{\zeta(3)} |k|^2 N^{-3/2} \text{ quand } N \rightarrow \infty, \text{ à } k \neq 0 \text{ fixé.} \quad (4.71)$$

D'une part, cette estimation montre que les vecteurs aléatoires satisfont amplement à la conjecture 2, par la dépendance en $N^{-3/2}$ des coefficients de Fourier individuels. D'autre part, ce modèle statistique permet de caractériser la dépendance de ρ_k par rapport au vecteur d'onde k , ce qui est nouveau par rapport à l'approche dynamique de la section 4.6.1. On va pouvoir comparer directement ces résultats statistiques aux spectres de Fourier des constellations des états propres chaotiques, soit individuellement, soit après moyennisation sur tous les états propres.

Pour cela, il est également utile de disposer de prédictions relatives aux coefficients de Fourier h_k de la densité logarithmique $h_\psi(x)$. La relation linéaire entre h_k et ρ_k induit

$$\langle |h_k|^2 \rangle_N \sim N^{-3} \frac{F_2(\kappa)}{\pi^2 \kappa^4} \text{ lorsque } N \rightarrow \infty. \quad (4.72)$$

Ce facteur de forme-ci est également dessiné sur la figure 6b (droite) de [3]. Celle-ci montre que, à l'inverse des coefficients de $\rho(x)$, les h_k prennent leurs valeurs maximales pour des petits vecteurs d'onde k , et décroissent en $\frac{1}{N^{1/2} \pi k^2}$ lorsque $|k| \gg \sqrt{N}$.

D'autre part, les systèmes chaotiques que nous avons étudiés présentent des symétries qui peuvent *a priori* influencer ces facteurs de forme. Nous avons déjà décrit les changements que ces symétries apportent au niveau des densités moyennes de zéros. Il est possible d'étendre le formalisme menant à ce facteur de forme pour un ensemble de vecteurs aléatoires pairs ; il suffit pour cela de calculer la matrice de covariance $m(z, \xi)$ à partir des fonctions de corrélation

$$\langle \psi(z) \overline{\psi(\xi)} \rangle_N^{\text{pair}} = \langle \psi(z) \overline{\psi(\xi)} \rangle_N + \langle \psi(z) \overline{\psi(-\xi)} \rangle_N, \quad (4.73)$$

et de réinjecter leur forme asymptotique dans l'équation (4.65). On obtient alors des formules beaucoup plus complexes que dans le cas sans parité, dues au fait que $R(x, y)$ ne sera plus ni isotrope, ni homogène. Néanmoins, on retrouve une formule relativement simple utilisant les fonctions à un point (4.56) dans le cas où x et y ne sont pas à proximité du même point de symétrie :

$$R^{\text{pair}}(x, y) \sim \rho^{\text{pair}}(x) \rho^{\text{pair}}(y) R(x, y) R(x, -y). \quad (4.74)$$

À partir de cette expression approximative, on montre que le facteur de forme de ce modèle est globalement identique à celui du modèle sans parité :

$$\langle |\rho_k|^2 \rangle_N^{\text{pair}} = \delta_{k,0} + \frac{1}{N} F_2(|k|/\sqrt{N}) + \frac{1}{N^2} F_{\text{corr}}(k/\sqrt{N}) + O(1/N^3), \quad (4.75)$$

la fonction F_{corr} étant une correction due aux abords des points de symétrie ; on sait seulement que cette fonction est équivalente à $\alpha k^2/N$ pour k petit, où $\alpha \geq 0$ est indéterminé. On se servira en fait de la prédiction du modèle sans parité pour les études comparatives qui suivent.

En revanche, il semble que les coefficients de Fourier aient des statistiques assez différentes dans les modèles de vecteurs aléatoires réels. Du fait des singularités dans la fonction à un point (concentration de zéros le long des axes de symétrie), on trouve déjà un résultat non-trivial pour la moyenne des coefficients de Fourier (on utilise les variables d'échelle $\kappa = k/\sqrt{N}$) :

$$\langle \rho_k \rangle_N^{\text{réel}} \sim \delta_{k,0} + \frac{2}{\sqrt{\pi N}} \{ \delta_{k_q} F_{\text{RP}}(\kappa_p) + \delta_{k_p} F_{\text{RP}}(\kappa_q) \} + \frac{1}{\pi N} F_{\text{point}}(\kappa). \quad (4.76)$$

La fonction d'échelle F_{RP} est fournie par la transformée de Fourier de la densité autour de l'axe de symétrie, qui est identique à celle de la densité pour le modèle de polynômes aléatoires étudié par Prosen [108]. On n'a par contre pas d'expression analytique simple de la fonction à deux points : celle-ci fait intervenir des déterminants de matrices 4×4 , qui ne se simplifient que lorsqu'on est loin des axes (on retrouve alors la prédiction des modèles complexes). On ne peut donc que formuler une conjecture quant au facteur de forme. Malgré la forte anisotropie de la moyenne $\langle \rho_k \rangle_N^{\text{réel}}$ ci-dessus, il est raisonnable de penser que la *variance* des coefficients de Fourier $\Delta \rho_k^2 = \langle |\rho_k|^2 \rangle_N^{\text{réel}} - \left(\langle \rho_k \rangle_N^{\text{réel}} \right)^2$ ne change pas drastiquement par rapport aux modèles complexes. Ceci fournit donc une expression pour le facteur de forme, à l'ordre dominant :

$$\langle |\rho_k|^2 \rangle_N^{\text{réel}} \approx \frac{1}{N} \left(\frac{4}{\pi} \{ \delta_{k_q} F_{\text{RP}}^2(\kappa_p) + \delta_{k_p} F_{\text{RP}}^2(\kappa_q) \} + F_2(|\kappa|) \right). \quad (4.77)$$

Cette formule (v. [3, fig. 6b droite]) est utilisée dans les figures rendant compte des coefficients de Fourier pour les états propres de S_1 et du boulanger, puisque ces transformations présentent toutes deux une symétrie anticanonique.

4.7.2 Résultats sur les coefficients de Fourier

Nous avons extrait numériquement les constellations pour des états propres des chats et du boulanger quantifiés U_{S_1} , U_{S_2} et U_B , et cela pour un certain nombre de valeurs de la constante de Planck (ces valeurs sont les mêmes que celles utilisées pour étudier les 'normes' des fluctuations). À partir de là, il est

trivial de calculer les coefficients de Fourier $\rho_{\psi,k}$ et $h_{\psi,k}$, et si besoin est, de prendre leurs moyennes sur tous les états d'une parité donnée. Nous n'avons pas encore accompli ce travail pour le chat perturbé U_{S_δ} , pour lequel les états propres sont sans symétrie (donc susceptibles d'être décrits par le modèle statistique le plus simple).

Nous nous contenterons ici de résumer la section 6 de [3], qui détaille les différentes facettes de l'analyse des spectres de Fourier de ces états propres, en relation avec les prédictions statistiques. L'idée majeure de cette section est la suivante : les caractéristiques essentielles d'un état propre chaotique ψ sont contenues de façon univoque et robuste dans les premiers coefficients de Fourier $\rho_{\psi,k}$, c'est-à-dire ceux pour lesquels le vecteur d'onde k est $\lesssim \sqrt{N}$. Ces coefficients de Fourier sont ainsi qualifiés d'*essentiels*, par opposition aux coefficients $|k| \gg \sqrt{N}$ qui semblent plutôt s'apparenter à du bruit dont on ne peut rien tirer.

Cette idée, qui, sans formulation plus précise, ne constitue même pas une conjecture au sens mathématique, provient de plusieurs constatations. Tout d'abord, il semble raisonnable de paramétrer une constellation de N points sur le tore par N coefficients de Fourier indépendants. Cela est évident en une dimension : N points z_l sur le cercle unité sont donnés exactement par leurs fonctions symétriques $s_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=1}^N z_l^k$, pour $k = 1, \dots, N$, à travers les formules de Newton ; les fonctions s_k pour $k > N$ peuvent d'autre part se déduire de ces N premières fonctions par des relations algébriques simples. Par contre, en deux dimensions cette correspondance ne peut être aussi simple. Si on cherche naïvement à reconstruire une constellation de N points à partir des $2N$ coefficients de plus grande longueur d'onde $\rho_{\psi,k}$ (il faut en prendre $2N$ à cause de la relation $\rho_{-k} = \bar{\rho}_k$), c'est-à-dire les coefficients de vecteurs d'onde $|k| \leq \kappa_{<} \sqrt{N}$, où $\kappa_{<} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2/\pi} \approx 0.7979$ on se heurte à plusieurs problèmes :

- ces $2N$ coefficients pourraient être dépendants les uns des autres dans le cas général, c'est-à-dire satisfaire des relations de dépendance autres que la relation triviale $\rho_{-k} = \bar{\rho}_k$. Si c'est le cas, on doit forcément en considérer d'autres pour caractériser la constellation.
- il existe en fait des constellations pour lesquelles la donnée de ces $2N$ premiers coefficients ne suffit pas : pour pouvoir différencier plusieurs réseaux quasi-équilatéraux (construits dans la section 4.2.1) dans la limite $N \rightarrow \infty$, on a nécessairement besoin de coefficients de Fourier de vecteurs d'onde $|k| \approx \kappa_{>} \sqrt{N}$, où $\kappa_{>} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2/\sqrt{3}} \approx 1.0746$. Nous pensons que l'ensemble des coefficients contenus dans ce disque de rayon $\kappa_{>} \sqrt{N}$ est suffisant pour caractériser de façon non ambiguë toute constellation.
- même en connaissant tous les coefficients dans le disque de rayon $\kappa_{>} \sqrt{N}$, on ne dispose pas d'algorithme, ou de formule algébrique pour en extraire explicitement les zéros ou les coefficients $\rho_{\psi,k}$ au-delà de ce disque. Pourtant, ceux-ci devraient être déterminés de façon unique.

Ces problèmes d'inversion de Fourier n'ont, à notre connaissance, pas reçu de

réponse définitive. Ils constituent pourtant un des piliers de la cristallographie, qui s'attache à retrouver les configurations atomiques dans une maille de cristal à partir des seuls *modules* $|\rho_k|$ des coefficients de Fourier. Pratiquement, les gens procèdent plutôt par tâtonnements, par approximations successives, ou en utilisant un 'principe d'entropie maximale' [38].

Bien que la restauration exacte de la constellation à partir d'un nombre fini de coefficients de Fourier reste hors de portée, il semble que les caractéristiques dominantes de la fonction de Husimi associée puissent tout de même être obtenues par les sommes de Fourier partielles. Pour le voir, comparons les spectres de Fourier de ces états propres aux facteurs de forme statistiques. Si on prend la moyenne quadratique d'un coefficient ρ_k sur tous les états propres, on retrouve de façon assez fidèle le facteur de forme $\langle |\rho_k|^2 \rangle_N^{\text{pair}}$ donné en (4.75) pour les états du chat S_2 sans symétrie anticanonique : en moyenne, ceux-ci sont donc isotropes et s'alignent fidèlement sur la courbe $F_2(\kappa)$ (v. fig. 4.8, haut). Pour les applications du chat S_1 , l'accord entre les données numériques et le facteur de forme conjecturé du modèle des vecteurs réels (4.77) est encore assez bon pour les directions k non singulières (c'est-à-dire autres que les axes horizontal et vertical), et pour les coefficients k relativement grands (v. fig. 4.8, bas). Pour l'application du boulanger, l'accord est moins bon, surtout pour les coefficients de petit $|k|$ (v. [3, fig. 9b, bas]).

Néanmoins, dans tous les cas la forme en cuvette de $|\rho_k|^2$ est toujours présente, même au niveau des états propres *individuels* [3, fig. 10, gauche et centre]. Cette forme en cuvette du facteur de forme semble donc constituer une caractérisation universelle des constellations d'états propres chaotiques (pour les états sur réseau (déformés ou non), la cuvette est d'une certaine manière de taille et de profondeur maximale [3, fig. 10, droite]). Comme on l'a noté pour les états aléatoires, la présence d'une cuvette au centre du spectre de Fourier est symptomatique de la répulsion entre zéros voisins. Si maintenant on divise ce spectre de Fourier par πk^2 , on obtient les coefficients $h_{\psi,k}$ de la densité de Husimi logarithmique $h_{\psi}(x)$ (cf. éq. (4.72)) : ceux-ci sont au contraire dominants à l'intérieur du disque $\{|k| \leq \sqrt{N}\}$, tandis qu'ils décroissent en $1/k^2$ lorsque $|k| \rightarrow \infty$. Ainsi, le problème d'inversion de Fourier à partir de ces $O(N)$ coefficients $h_{\psi,k}$ prend une autre dimension ; bien que la série de Fourier de $h_{\psi}(x)$ ne converge pas pour tout point x , on peut raisonnablement penser que ses sommes partielles n'incluant que ces $O(N)$ coefficients fourniront une bonne approximation de la fonction ailleurs qu'au voisinage de ses zéros, le reste de la série étant contrôlé par des coefficients $h_{\psi,k}$ bien plus petits. Nous avons testé cette resommation partielle de la série $\sum_k h_{\psi,k} e^{2i\pi k \cdot x}$:

- d'une part sur tout le tore, pour un état propre particulier du boulanger présentant une cicatrice sur l'orbite de période deux [3, fig. 12] : cette cicatrice apparaît déjà lorsqu'on tronque la série pour ne garder que 4 coefficients indépendants ; si on inclut tout le disque $\kappa > \sqrt{N}$, on retrouve une

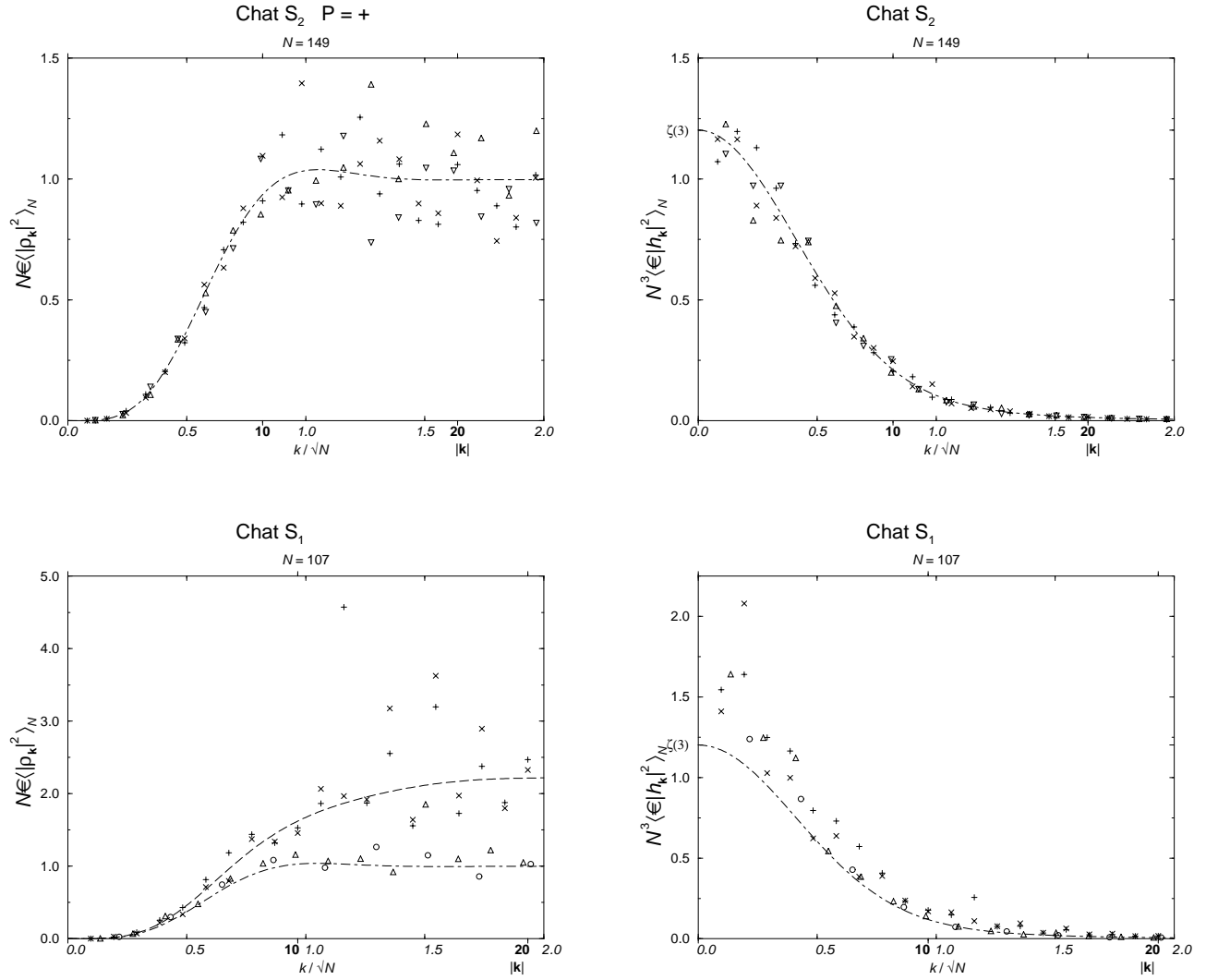


FIG. 4.8 – Moyennes quadratiques des coefficients de Fourier des constellations (gauche) et des densités de Husimi logarithmiques (droite), pour les états propres pairs de U_{S_2} (en haut) et U_{S_1} (en bas). Les abscisses indiquent la norme du vecteur d'onde $|k|$, ainsi que sa valeur renormalisée κ . Chaque point correspond à la moyenne sur les états propres d'un coefficient à k fixé, choisi dans certaines directions : + horizontal, \times vertical, Δ première diagonale, ∇ seconde diagonale, et \circ dans la direction (2, 1) pour le chat S_1 . Les courbes représentent les facteurs de forme prédits par les modèles statistiques : à gauche, en traits alternés, la fonction $F_2(\kappa)$ définie en (4.69) ; en traits discontinus, la forme conjecturée le long des axes de symétrie pour les vecteurs réels (4.75). À droite, le facteur de forme de la densité logarithmique (4.72).

image très fidèle de la densité de Husimi.

- d'autre part, au point $x = (0, 0)$, pour un ensemble d'états propres du chat U_{S_1} [3, fig. 11] : les sommes partielles convergent assez rapidement vers leur valeur limite $h_\psi(0)$, tout en présentant encore des oscillations de Gibbs hors du disque de rayon $\kappa_{>\sqrt{N}}$; la seule exception concerne un état pour lequel l'origine est très proche d'un zéro. Plus empiriquement, il semble qu'on puisse discerner un pic de densité en l'origine en observant les signes des coefficients $h_{\psi,k}$ dans le disque $\{|k| \leq \kappa_{<\sqrt{N}}\}$ (cf. [3, fig. 10]).

À partir de ces résultats assez empiriques, on peut donc formuler la conjecture suivante, qui concerne a priori tout état de $\mathcal{H}_{N,\kappa}$:

Conjecture 3 *La fonction de Husimi $H_\psi(x)$ d'un état ψ de $\mathcal{H}_{N,\kappa}$ est donnée approximativement par exponentiation des sommes partielles $\sum_{|k| \leq K} h_{\psi,k} e^{2i\pi k \cdot x}$, pour un cut-off K de l'ordre de \sqrt{N} .*

Toute la subtilité réside bien entendu dans l'adverbe 'approximativement'. A-t-on une convergence ponctuelle ? Uniforme sur le tore ? De type L^s ?

4.7.3 Cicatrices

On s'est jusqu'à présent intéressé aux coefficients $h_{\psi,k}$ pour des états propres correspondant à une valeur de N fixée. En étudiant maintenant la dépendance de ces coefficients par rapport à N , on revient à la description des cicatrices, esquissée dans la section 4.5.2. Nous regroupons les résultats sur ces coefficients de Fourier avec ceux de la norme sup, décrits dans cette même section.

En effet, nous rappelons que selon notre conjecture 2 de la section 4.6.1, la propriété de Schnirelman interdirait à un coefficient de Fourier ρ_k de décroître moins vite qu'en $o(N^{-1})$ dans la limite $N \rightarrow \infty$. Les modèles statistiques prévoient une décroissance des coefficients en $N^{-3/2}$, ce qui est compatible avec notre conjecture. Nous avons cherché à estimer la dépendance par rapport à N des coefficients $|h_{1,0}|$ et $|h_{1,1}|$ pour les états propres du chat S_1 et du boulanger, en utilisant une échelle logarithmique [3, fig. 13a et b, droite] : on cherche donc à majorer les exposants $\beta_k = \limsup \frac{\log |h_k|}{\log N}$.

Si on suppose qu'un état propre n'a que des cicatrices ponctuelles (cela semble être le cas pour les états propres du chat), la largeur de la cicatrice ne peut être que de l'ordre de $1/\sqrt{N}$, qui est la seule longueur caractéristique du problème (cette dépendance est confirmée 'à l'œil nu' par nos simulations numériques). Par conséquent, la propriété de Schnirelman impose une croissance de la fonction de Husimi au point périodique du type $H_N(x_o) = o(N)$. L'exposant de croissance $\alpha = \limsup_N \frac{\log |H_N(x_o)|}{\log N}$ doit donc être < 1 pour qu'on soit sûr de l'équidistribution en mesure des densités H_N . Comme on ne regarde que les cicatrices les plus fortes (l'origine pour les états pairs de U_{S_1} et du boulanger, l'orbite de période 2 contenant $(1/3, 2/3)$ pour les états impairs du boulanger), on peut

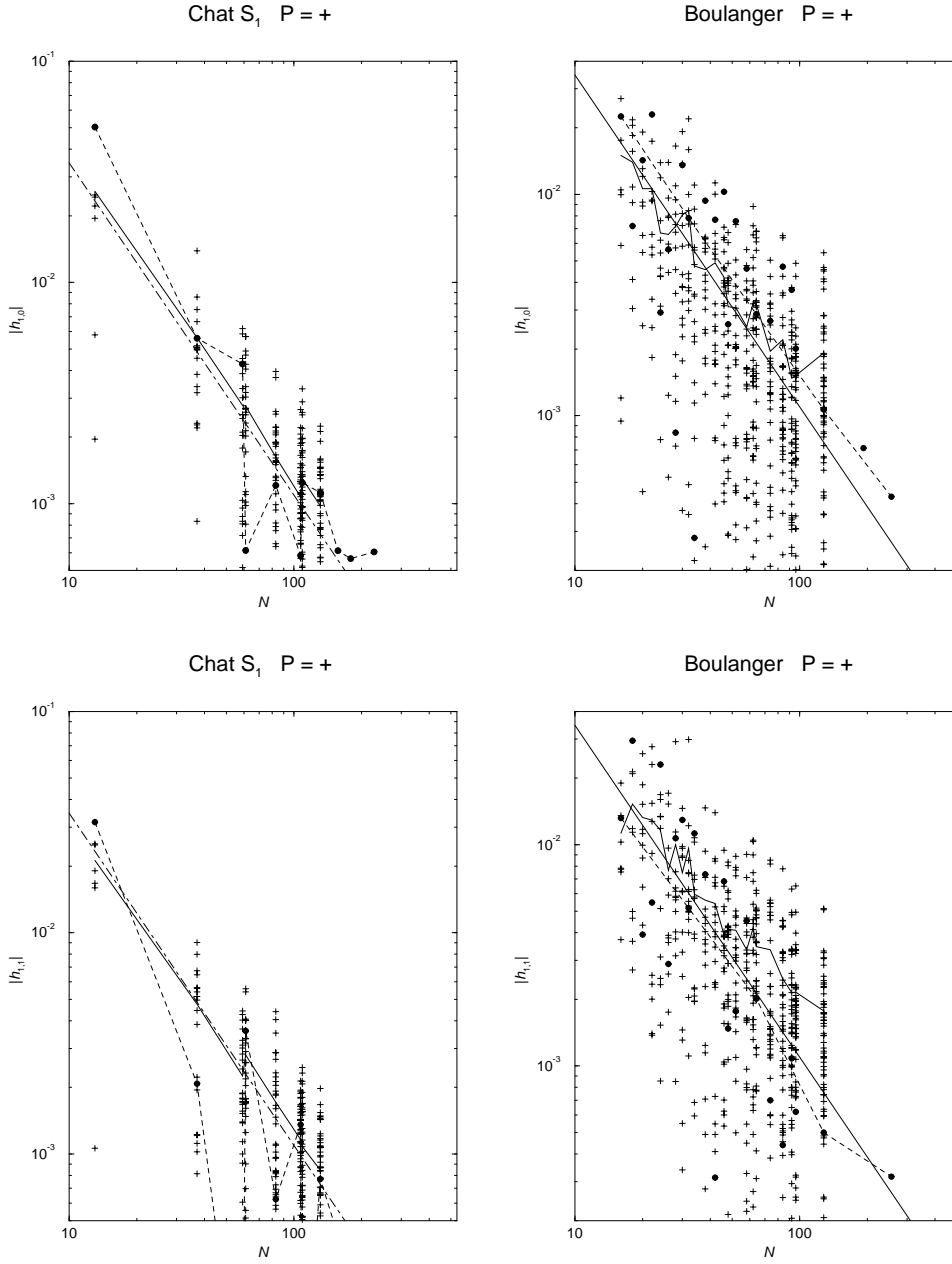


FIG. 4.9 – Premiers coefficients de Fourier $|h_{0,1}|$ (haut) et $|h_{1,1}|$ (bas) pour les états propres pairs des transformations U_{S_1} (gauche) et U_B (droite). On utilise une échelle log-log pour essayer de mesurer l'exposant β de décroissance des coefficients par rapport à N . Une ligne droite représente le modèle aléatoire, qui prédit une pente $-3/2$ (hachures alternées à gauche, ligne continue fine à droite). Pour chaque N , les cercles pleins représentent l'état à la cicatrice la plus marquée en $(0,0)$. Ces points sont reliés par les pointillés (uniquement pour les valeurs $N = 2^k$ dans le cas du boulanger). La ligne en trait plein est la moyenne quadratique sur tous les états pairs.

remplacer $H_N(x_o)$ par $\|H_N\|_\infty$ dans la définition de α , et utiliser les figures 4.6 et 4.4 (nous n'avons pas cherché les cicatrices sur les états propres du chat perturbé).

En prenant la moyenne quadratique sur les états propres des coefficients de Fourier ci-dessus, on trouve les résultats suivants pour les coefficients β_k (qui semblent ne pas dépendre du vecteur d'onde k considéré) : pour les états pairs du chat U_{S_1} , on a $-1.5 \leq \beta \leq -1.4$, tandis que pour les états pairs (resp. impairs) du boulanger on a $\beta \approx -1.1$ (resp. $\beta \lesssim 1.33$), donc des valeurs plus singulières que les prédictions statistiques. La moyenne quadratique des normes sup semble compatible avec une croissance du type $\leq 2 \log N$ prédite par le modèle statistique.

Néanmoins, on sait que les cicatrices ne sont pas censées se manifester sur ces moyennes, mais qu'il faut au contraire observer les états propres individuels. On a donc tenté d'estimer les exposants α et β en ne considérant que les états les plus singuliers, autrement dit en prenant l'enveloppe supérieure des coefficients $|h_k|$ (resp. des normes sup) sur les figures 4.4, 4.6 et 4.9. On remarque d'ailleurs que les états ayant la cicatrice la plus forte au sens de la norme sup (symbolisés par un cercle plein sur les figures) ne sont pas ceux qui maximisent $|h_k|$.

Pour les états du chat, on trouve alors que $\alpha \lesssim 0.5$ pour les états impairs (non représentés dans les figures), $\alpha \lesssim 0.34$ pour les états pairs. Les coefficients β sont bornés supérieurement par -1.1 . Signalons que pour les états pairs considérés, en utilisant l'expression explicite des états propres, nous avons obtenu la *borne rigoureuse* $\|H_\phi\|_\infty \leq C\sqrt{N}$, valable pour tous les états propres ϕ relatifs à certaines suites de valeurs de N (voir annexe B). Cette majoration uniforme est bien entendu compatible avec le résultat numérique pour α .

En ce qui concerne les états propres du boulanger, les coefficients montrent une localisation plus importante, comme on l'a remarqué lors de l'étude des 'normes'. Pour les états pairs (resp. impairs), on a $\alpha = 0.8$, $\beta \leq -1.0$ (resp. $\alpha = 0.85$, $\beta \leq -1.2$). Signalons également que les normes sup maximales sont très régulières si on considère des valeurs $N = 2^j$ ou $N = 3 \cdot 2^j$. On remarque donc que le coefficient β pour les états impairs est à la limite de validité de la propriété d'équidistribution. Cette valeur a été obtenue sur très peu d'états, donc elle est bien sûr soumise à caution. Néanmoins, une suite exceptionnelle d'états propres n'est pas exclue pour l'application du boulanger ; d'ailleurs, bien que les coefficients α restent inférieurs à 1, la présence de cicatrices non-ponctuelles sur certains états propres du boulanger (on trouve des cicatrices le long des variétés stable et instable de l'origine sur l'état du haut de la figure 4.2) rend l'utilisation du coefficient α comme indice paramètre d'uniformité asymptotique assez douteuse. Un état d'onde plane a par exemple une norme sup croissant en $\sqrt{2N}$, et il est singulier à la limite semi-classique. En règle générale, les états propres du boulanger sont donc plus singuliers que ceux du chat. Il reste à faire le même travail pour les états propres du chat perturbé, afin de s'assurer du caractère générique des résultats du chat.

4.7.4 Comparaison aux estimations semi-classiques

Il existe plusieurs approches pour expliquer semi-classiquement la présence (ou l'absence) d'une cicatrice sur les états propres de systèmes classiquement chaotiques. La première est due à Heller [70], qui fut le premier à observer numériquement le renforcement de fonctions d'onde le long d'orbites périodiques instables, sur des billards quantiques bidimensionnels. Sa théorie 'linéaire' consiste à étudier la propagation dans le temps d'un paquet d'onde gaussien $|z\rangle$ situé initialement le long de l'orbite périodique. Bien entendu, cette propagation n'est semi-classique que jusqu'au temps $\log 1/\hbar$. Par transformée de Fourier, on obtient ainsi la moyenne du recouvrement $|\langle z|\phi_n\rangle|$ prise sur un certain nombre d'états propres $|\phi_n\rangle$. Cette théorie permet donc de mettre en évidence une *enveloppe* d'états propres susceptibles de présenter une cicatrice autour de l'orbite périodique considérée. Heller prédit aussi que seules les orbites de courte période pourront cicatrifier les états propres (celles pour lesquelles $\lambda T < 1$, où λ est l'exposant de Lyapunov, T la période), et que le renforcement du recouvrement sera de l'ordre de $\frac{1}{\lambda T}$ par rapport au 'bruit de fond statistique'.

Une analyse partant de la formule des traces de Gutzwiller a mené Bogomolny [30] (resp. Berry [22]) à une estimation plus précise des fonctions d'onde dans l'espace de configuration (resp. l'espace des phases). Nous ne décrivons que succinctement le résultat de Berry, qui correspond plus à notre approche : Berry calcule la moyenne, sur une fenêtre d'énergie de largeur ϵ , des fonctions de Wigner $W(x, E_n)$ d'états propres d'énergies $E_n \approx E$, dans un système hamiltonien autonome H_o de dimension D ; il obtient un terme de Thomas–Fermi, auquel s'ajoutent des contributions oscillantes dues aux orbites périodiques p :

$$W(x; E, \epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n W(x, E_n) \delta_\epsilon(E - E_n) \quad (4.78)$$

$$\sim \delta_\epsilon(E - H_o(x)) + \sum_p \frac{2^N e^{-\epsilon T_p/\hbar}}{\sqrt{\det(\mathbf{M}_p - \mathbf{I})}} \cos\left(\frac{1}{\hbar}(S_p + {}^t\mathbf{X}\mathbf{J}\frac{\mathbf{M}_p - \mathbf{I}}{\mathbf{M}_p + \mathbf{I}}\mathbf{X}) + \gamma_p\right) \delta_\epsilon(E - H_o(x)).$$

Dans cette formule, x est la position dans l'espace des phases, \mathbf{X} la variable réduite donnant l'éloignement (en restant dans la couche d'énergie Σ_E) par rapport à l'orbite périodique p , \mathbf{M}_p est la matrice de monodromie de l'orbite, S_p son action, γ_p son indice de Maslov, \mathbf{J} la matrice de la forme symplectique. La fonction de Dirac remplace en fait une fonction d'Airy de largeur $\sim \hbar^{2/3}$. À largeur ϵ fixé, le poids de l'orbite périodique sur la moyenne des fonctions de Wigner en x est donc en \hbar^{D-1} . Dans le cas d'un hamiltonien bidimensionnel, on trouve donc une décroissance de la 'force' de la cicatrice $\sim \hbar$.

Pour avoir accès aux états propres individuels (c'est-à-dire faire tendre $\epsilon \rightarrow 0$), il faut pouvoir resommer la somme sur les orbites périodiques, qui diverge fortement du fait de leur prolifération exponentielle lorsque $T \rightarrow \infty$. Agam et Fishman ont utilisé une resommation partant de valeurs complexes de \hbar , pour lesquelles la

série converge, et procédant par continuation analytique [4]. Ce mécanisme de resommation tronque effectivement la série, de sorte que seules les orbites de période $\leq \pi \hbar \bar{d}(E)$ contribuent au calcul de la fonction de $W(x, E)$. Une fois obtenue l'expression semi-classique de la fonction de Wigner, les auteurs définissent quantitativement le poids d'une orbite périodique p par l'intégrale $Y_p(E)$ de $W(x, E)$ dans un tube entourant l'orbite p de diamètre \hbar . Remarquons que cette définition correspond *grosso modo* à prendre l'intégrale de la fonction de Husimi le long de cette orbite, ou, pour la dynamique réduite, considérer la valeur de H_ψ au point périodique. En appliquant leur formalisme à un billard hyperbolique, les auteurs observent effectivement une corrélation entre les grandes valeurs des poids $Y_p(E)$, calculés semi-classiquement, avec l'apparition d'une cicatrice le long de l'orbite p . De plus, ils estiment la décroissance du poids pour les états cicatrisés à $\frac{1}{\sqrt{E}}$, ce qui revient exactement à la décroissance en \hbar de Berry. Enfin, les énergies correspondant aux états cicatrisés sont empiriquement celles pour lesquelles une 'onde stationnaire' peut se développer le long de l'orbite p , c'est-à-dire celles satisfaisant à une condition de Bohr-Sommerfeld $S_p(E) = 2\pi\hbar n + \hbar\gamma_p$. Ces résultats encourageants pour le billard hyperbolique sont malheureusement mis en défaut par l'étude similaire faite sur un billard de courbure négative constante [11] : on n'observe plus de corrélation évidente entre les grandes valeurs de $Y_p(E)$ et une cicatrice le long de p ; les auteurs invoquent la multitude d'orbites de courte période pour ce type de système, entraînant des interférences entre les poids des différentes orbites.

Ce problème de caractérisation des cicatrices sur un billard de courbure négative nous mène aux résultats rigoureux de Sarnak, Rudnick et Iwaniec [72, 112]. Ces auteurs étudient les fonctions propres du laplacien sur des surfaces hyperboliques compactes X de dimension 2 (le système dynamique classique associé a la propriété d'Anosov [63]). Lorsque ces surfaces sont construites comme quotients du disque de Poincaré par des sous-groupes *arithmétiques* de $SU(1, 1)$, on peut estimer les fonctions propres de façon plus précise que pour une surface générique (on sait d'autre part que le spectre du laplacien présente alors des corrélations non standard, dues aux fortes dégénérescences des longueurs des géodésiques [33]). Les résultats sont donnés sous forme d'estimations dans l'espace de configuration, les densités de probabilité considérées étant les carrés $\mu_n(q) \stackrel{\text{def}}{=} |\psi_n(q)|^2$ des fonctions d'onde $\psi_n(q)$ d'énergie E_n . D'une part, Rudnick et Sarnak montrent qu'aucune suite μ_{n_k} ne peut converger vers une mesure singulière localisée le long d'une orbite périodique ; ils conjecturent ensuite que toute suite ρ_{n_k} converge vers la densité ergodique sur X [112]. Sur ces mêmes surfaces, Iwaniec et Sarnak obtiennent des estimations sur la norme sup des fonctions $\psi_n(q)$ [72], qui améliorent la borne $\|\psi_n\|_\infty \leq C E_n^{1/4}$ valable pour toute surface compacte : ils obtiennent

$$\forall \epsilon, \quad \exists C_\epsilon, \quad \|\psi_n\|_\infty \leq C_\epsilon E_n^{5/24+\epsilon},$$

et surtout exhibent une *infinité* d'états propres ψ_{n_j} pour lesquels

$$\|\psi_{n_j}\|_\infty \geq C \sqrt{\log \log E_{n_j}}.$$

Ils montrent ainsi que les densités propres ne sont pas bornées uniformément sur X , mais croissent à l'infini. Les auteurs remarquent que le taux de croissance est très faible, et reste compatible avec la prédiction des ensembles d'états aléatoires, qui est en $\sqrt{\log E_n}$. D'autre part, ils énoncent la conjecture

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists C_\epsilon, \quad \|\psi_n\|_\infty \leq C_\epsilon E_n^\epsilon, \quad (4.79)$$

pour ces surfaces de dimension 2. Cette conjecture est contredite dans le cas des surfaces hyperboliques de dimension 3, pour lesquels on peut construire une suite infinie de fonctions propres ψ_{n_j} telle que $\|\psi_{n_j}\|_\infty \geq C E_{n_j}^{1/4}$ [112].

Comment situer nos résultats sur les applications quantiques par rapport à ceux qui précèdent ? Tout d'abord, nous n'avons pas la moindre explication semi-classique du type Agam–Fishman quant à la présence de cicatrices sur des états propres particuliers. Une voie d'approche possible consisterait à écrire le développement semi-classique de la fonction de Green à énergie fixée, qui mène à des formules du type (4.78). Ce travail a été amorcé par Monastera [96], qui s'est intéressé aux applications quantiques du chat, du boulanger et à l'application de Harper (qui revient à un hamiltonien de Harper pulsé), mais n'a pas cherché à utiliser les formules semi-classiques obtenues pour analyser le phénomène de cicatrice pour ces systèmes.

Quantitativement, les estimations obtenues dans [22, 4] sur la décroissance des cicatrices correspondent, dans nos notations, à des fonctions de Husimi majorées uniformément en N , puisqu'un poids de cicatrice $\sim \hbar$, ou de façon équivalente $1/\sqrt{E}$ observé pour le billard hyperbolique correspondra, après projection sur la section de Poincaré, à une tache de largeur $1/\sqrt{N}$, de hauteur approximativement constante $\sim 1/\lambda$, où λ est l'exposant de Lyapunov du point périodique (cf. section 1.1.2). Nos résultats semblent donc contradictoires avec ceux-ci : nous trouvons des densités de Husimi non bornées dans la limite $N \rightarrow \infty$. En projetant celles-ci sur l'axe des abscisses, on peut aussi les comparer aux résultats de [112] sur les surfaces hyperboliques. La projection d'une cicatrice de type $\sqrt{2\pi} N^\alpha e^{-2\pi N(q^2+p^2)}$ sur l'espace de configuration donne une mesure $\mu(q)$ valant localement $\mu(q) \geq N^{\alpha-1/2} e^{-2\pi N q^2}$. Autrement dit, la conjecture (4.79) pour les fonctions propres du laplacien sur des surfaces de dimension 2 de courbure négative constante ne sera vérifiée par nos états propres que si $\alpha \leq 1/2$. Pour les états propres du chat S_1 , on peut montrer rigoureusement que cette borne est effective, au moins pour les valeurs de N que nous avons considérées (c'est-à-dire des nombres premiers scindés, aboutissant à une dégénérescence minimale des pseudo-énergies) ; on peut également montrer que dans ce cas-là la conjecture de Rudnik-Sarnak est vraie (v. l'annexe B). Par contre, pour les états du boulanger, les normes sup maximales

semblent croître en $N^{0.8}$, donc violer cette conjecture. C'est également le cas si on considère des suites d'états du chat très dégénérés, pour lesquels le théorème de Schnirelman ne s'applique plus (v. l'annexe B).

Nous n'avons pas fait une analyse aussi précise des états propres du chat perturbé $S_1(\delta)$. Néanmoins, si on se borne à comparer les normes supérieures sur les deux figures 4.4 et 4.5, il semble que leur croissance typique en N soit comparable. Ceci signifie que les états propres du chat pour les valeurs de N minimisant la dégénérescence ont des propriétés similaires à des états propres d'un système "générique", tandis que ceux du boulanger sont déformés par la singularités le long de l'axe imaginaire.

Conclusion générale

Le fil conducteur de cette thèse est sans conteste l'étude et l'utilisation des représentations de Bargmann–Husimi et stellaire des états quantiques unidimensionnels. Pour cela, il nous a fallu préciser un peu plus les caractéristiques purement *cinématiques* de ces représentations, et des relations qui les unissent. Notre théorème d'équidistribution des zéros pour les fonctions propres chaotiques est en fait une propriété intrinsèque aux représentations de Husimi et stellaire : une distribution non-uniforme de zéros engendre forcément une fonction de Husimi singulière, lorsque $N \rightarrow \infty$. Nous n'utilisons la dynamique quantique que par le biais de la propriété de Schnirelman, mais jamais dans le déroulement de la preuve. Un problème intéressant serait l'établissement d'une propriété réciproque à ce théorème : qu'implique l'équidistribution des zéros des états propres au niveau du système dynamique classique ?

Nous avons utilisé ces représentations pour 'mettre de l'ordre' dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{N,\kappa}$, c'est-à-dire ordonner les états quantiques selon leur degré de localisation. Pour cela, on a eu recours à plusieurs 'normes' mesurant les fluctuations quantiques directement au niveau des densités de Husimi. Nous pensons que l'utilisation de ces normes peut se révéler fructueuse si l'on cherche des propriétés plus fines des états propres chaotiques que celle d'équidistribution en mesure. La question d'optimisation de ces 'normes' parmi tous les états quantiques pose déjà un problème intéressant, lui aussi de nature cinématique : elles exhibent une sorte d'"incompressibilité" des fluctuations quantiques, qui ne peuvent décroître vers 0 dans la limite $\hbar \rightarrow 0$; autrement dit, il existe un 'gap' entre la densité uniforme classique et les densités quantiques les plus ergodiques. Nous avons proposé la conjecture que les états 'maximalement ergodiques' correspondent à des constellations sous forme de réseau équilatéral, par analogie au problème d'empilement de sphères dans le plan. Enfin, autre problème cinématique abordé dans ce travail : comment reconstruire exactement une densité de N points sur le tore à partir d'un nombre fini (de l'ordre de N) de coefficients de Fourier ? Sous quelles conditions sur la densité les séries de Fourier partielles convergent-elles 'gentiment' ? Ces questions ont des réponses assez simples en une dimension, mais le passage à deux dimensions semble non-trivial.

Ce saut dimensionnel 1D→2D est en fait assez caractéristique des problèmes qui se posent lorsqu'on passe d'une dynamique intégrable (par exemple le système

hamiltonien H_{hyperb}) à une dynamique chaotique. Classiquement, la particule vit sur des espaces différents : une courbe d'énergie Σ_E dans le premier cas, le tore tout entier dans le second. Par une sorte de 'dualité', la même opposition 1D-2D est vérifiée par les constellations d'états propres, dans la limite semi-classique : celles des états intégrables sont localisés le long de lignes d'anti-Stokes, alors qu'elles sont délocalisées sur tout l'espace des phases dans le cas chaotique. La non-trivialité du passage 1D-2D se retrouve dans les estimations sur la dérivée de la fonction de Bargmann : la jolie formule

$$\hbar \frac{\psi'}{\psi}(z) \sim \bar{z}$$

a une signification différente pour les deux types de dynamique. Dans le cas intégrable, elle est vraie uniformément sur la surface d'énergie Σ_E , dans le cas chaotique elle n'a de sens que pour des topologies plus grossières mais s'applique sur tout le tore.

Cette formule révèle un aspect important des états propres chaotiques, celui de l'*universalité* de leurs propriétés. Cette formule ignore en effet totalement la spécificité du système étudié, pour autant qu'il soit classiquement ergodique. Si on cherche à décrire plus précisément les constellations de ces états propres, cette universalité persiste, dans les caractéristiques *moyennes* des états propres mais également dans celles des états *individuels* ; la meilleure façon de le voir consiste à considérer les coefficients de Fourier de ces constellations : ceux-ci ont systématiquement une distribution en cuvette autour de l'origine, jusqu'à des vecteurs d'onde $|k| \approx \sqrt{N}$ après quoi on ne les distingue pas d'un bruit blanc. Les coefficients moyennés sur les états propres sont par contre remarquablement en accord avec ceux prédits par les modèles de vecteurs aléatoires. Cette correspondance a également été vérifiée au niveau des différentes 'normes' des densités de Husimi. Celles-ci montrent donc que les états propres chaotiques sont en moyenne loin d'être aussi ergodiques que les états sur réseau minimisant les 'normes', même à la limite semi-classique.

C'est par une étude plus approfondie de ces fluctuations au niveau des états *individuels* qu'on peut espérer différencier les dynamiques chaotiques les unes des autres, c'est-à-dire échapper à l'universalité. Là encore, les coefficients de Fourier des constellations semblent contenir l'essentiel de l'information semi-classique, typiquement la présence d'une cicatrice sur la densité de Husimi. Malgré l'impossibilité de reconstituer exactement l'état propre à partir de ces coefficients (cf. plus haut), il semble que l'uniformité des constellations chaotiques permette au moins une reconstruction approximative assez fidèle de la densité de Husimi par les sommes de Fourier partielles. La présence d'information sur les orbites périodiques classiques dans ces coefficients de Fourier 'essentiels' est réminiscente du phénomène analogue concernant les corrélations spectrales : en effet, le facteur de forme des énergies propres pour un système classiquement chaotique est donné par une forme universelle (correspondant aux modèles de matrices aléatoires) sauf

pour les petits paramètres de Fourier, où se font sentir les orbites périodiques courtes [21]. Cependant, la nature multiplicative (donc fortement non-linéaire) des constellations (et de leurs coefficients de Fourier) rend cette correspondance avec les orbites classiques non-triviale.

La même difficulté apparaît si on s'intéresse à la dynamique dans le temps, c'est-à-dire à l'évolution d'un état quelconque par un propagateur quantique, qui peut être hamiltonien ou à temps discret. La suite logique du travail présenté ici consiste alors à étudier cette évolution dans le temps directement au niveau des constellations. Pour une évolution hamiltonienne, on sait en effet écrire de façon fermée cette 'dynamique des zéros', comme un système différentiel de la forme $\dot{z}_k(t) = f_H(z_k(t); \{z_i(t)\})$, $k = 1, \dots, N$, où la fonction f_H est très non-linéaire, sauf pour des hamiltoniens triviaux [83]. Le système dynamique à N particules $z_k(t)$ obtenu est en général assez inextricable, il contient des interactions à plusieurs particules, toutes répulsives à courte distance. Néanmoins, il n'est pas impossible que pour une constellation initiale de zéros assez homogène, comme par exemple celle d'un état propre chaotique, une sorte de phénomène d'écrantage permette de retrouver, au moins approximativement, un mouvement collectif des zéros. C'est le cas si on applique un hamiltonien quadratique à un état sur réseau (cela correspond à une version à temps continu d'une transformation du chat). Cette étude de la 'dynamique des zéros' étant à un stade encore préliminaire, nous avons préféré ne pas l'inclure dans le corps de cette thèse, qui est donc entièrement vouée à leurs propriétés 'statiques'.

Annexe A

Calcul des ‘normes’ pour les états sur réseau

On présente ici le calcul des ‘normes’ des fluctuations des fonctions de Husimi sur le tore, dans le cas particulier des états sur réseau décrits dans la section 4.2.1, en complément de l’étude faite dans l’appendice A de [3]. En particulier, on montre comment obtenir les valeurs numériques données dans le tableau 4.1 de la section 4.5.1.

La plupart de ces normes s’expriment à partir d’une intégrale du type $\int_{\mathbb{T}^2} dq dp f(H_\psi(q, p))$, où la fonction f peut être la mise au carré, le logarithme. Pour les états sur réseau, on peut se ramener à une intégrale portant sur la brique élémentaire $H_{\chi(\tau)}$ définie en (4.1). En effet, supposons le réseau de zéros sur \mathbb{T}^2 engendré par (v_1, v_2) , comme sur la figure 3.3, à gauche. Le paramètre modulaire est noté $\tau = v_2/v_1$ (où on utilise des notations complexes pour v_1, v_2 après une réflexion par rapport à l’axe réel). Si on opère le changement de coordonnées $(q, p) = x = \alpha v_1 + \beta v_2$, le jacobien $\frac{D(q,p)}{D(\alpha,\beta)}$ vaut $\det(v_1, v_2) = 1/N$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2} dq dp f(H_\psi(q, p)) &= \frac{1}{N} \int d\alpha d\beta f(H_\psi(\alpha v_1 + \beta v_2)) \\ &= \frac{1}{N} \int d\alpha d\beta f(H_{\chi(\tau)}(\alpha + \tau\beta)). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

L’intégrale sur $(\alpha + \tau\beta)$ s’étend sur un domaine contenant exactement N copies du tore T_τ de périodes 1, τ , et il est clair que la fonction $H_{\chi(\tau)}$ est périodique par rapport à ce tore. Par conséquent, on aboutit à

$$\int_{[0,1]^2} d\alpha d\beta f(H_{\chi(\tau)}(\alpha + \tau\beta)). \quad (\text{A.2})$$

Ceci permet en fait de définir les ‘normes’ associées à la brique élémentaire $H_{\chi(\tau)}$, pour toute valeur de τ dans le demi-plan supérieur, sans se restreindre aux sous-réseaux de \mathbb{T}^2 . Le calcul des intégrales ci-dessus se fait généralement en utilisant

la transformée de Fourier de l'intégrand $f(H_{\chi(\tau)})$. Lorsque f est le logarithme népérien, on se sert de l'identité [17, vol II, §13.19] :

$$\log \left[\frac{\theta_1(\pi z|\tau)}{\theta_1'(0|\tau)} \right] = \log(\sin(\pi z)) + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{2m}}{1 - q^{2m}} \frac{\sin^2(\pi m z)}{m}, \quad (\text{A.3})$$

où on note $q = e^{i\pi\tau}$. La série converge absolument pour tout z dans la bande $|\Im z| < \Im \tau$. La fonction $\log(\theta_1(\pi z|\tau))$ n'est périodique que par rapport à $z \mapsto z+1$. Si on lui ajoute son complexe conjugué et le terme quadratique $-2\pi(\Im z)^2/\Im \tau$, on retrouve (à une constante près) la fonction $\log H_{\chi(\tau)}$, qui est également périodique par rapport à $z \mapsto z + \tau$. On obtient ainsi la décomposition de Fourier :

$$\log H_{\chi(\tau)}(\alpha + \tau\beta) = \frac{1}{2} \log(2\Im \tau) + 2\Re \log \eta(\tau) - \frac{\Im \tau}{\pi} \sum_{(m,l) \neq (0,0)} \frac{e^{2i\pi(m\alpha + l\beta)}}{(m\Im \tau)^2 + (l - m\Re \tau)^2} \quad (\text{A.4})$$

où $\eta(\tau) = e^{i\pi\tau/12} \prod_{n \geq 1} (1 - e^{2i\pi n\tau})$ est la forme modulaire de Dedekind. Cette série de Fourier converge hors des points (α, β) entiers. Le terme constant fournit la moyenne géométrique de $H_{\chi(\tau)}$:

$$\text{GM}[H_{\chi(\tau)}] = \exp \left\{ \int_{[0,1]^2} d\alpha d\beta \log(H_{\chi(\tau)}(\alpha + \tau\beta)) \right\} \quad (\text{A.5})$$

$$= \sqrt{2\Im \tau} |\eta(\tau)|^2. \quad (\text{A.6})$$

La fonction $\eta(\tau)$, ainsi que les valeurs $\theta_i(0|\tau)$, pour $i = 1, \dots, 4$, peuvent être exprimées en terme d'intégrales elliptiques de Legendre, $\mathbf{K}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, de la manière suivante [17, vol. II, p.362] :

$$k' \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1-k^2}, \quad \mathbf{K}'(k) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{K}(k'), \quad \tau \stackrel{\text{def}}{=} i \frac{\mathbf{K}'}{\mathbf{K}}(k) \\ \implies \theta_3(0|\tau) = \sqrt{\frac{2\mathbf{K}}{\pi}}, \quad \theta_2(0|\tau) = \theta_3(0|\tau)\sqrt{k}, \quad \theta_4(0|\tau) = \theta_3(0|\tau)\sqrt{k'}, \quad (\text{A.7})$$

$$\eta(\tau) = (2kk')^{1/6} \sqrt{\frac{\mathbf{K}(k)}{\pi}}. \quad (\text{A.8})$$

On connaît les valeurs de k et \mathbf{K} correspondant aux paramètres τ des réseaux carré et équilatéral [17, vol. II, p.320], et on obtient les moyennes géométriques indiquées dans le tableau 4.1. Une étude des variations de la fonction $\eta(\tau)$ dans le domaine modulaire est faite dans l'appendice A de [3] ; elle révèle que le paramètre τ rendant maximale la moyenne géométrique correspond au réseau équilatéral.

On peut de même calculer la série de Fourier (cette fois-ci uniformément convergente dans le plan (α, β)) de la fonction $H_{\chi(\tau)}(\alpha + \tau\beta)$, à partir de la série définissant $\theta_1(z|\tau)$. On trouve

$$H_{\chi(\tau)}(\alpha + \tau\beta) = \sum_{m,l} e^{2i\pi(m\alpha + l\beta)} (-1)^{ml+l+m} e^{-\frac{\pi}{2\Im \tau} [(l-m\Re \tau)^2 + (m\Im \tau)^2]}. \quad (\text{A.9})$$

Cette décomposition nous fournit (par la formule de Parseval) la moyenne quadratique de $H_{\chi(\tau)}$, qui s'exprime en termes d'une fonction thêta à deux dimensions :

$$\int_{[0,1]^2} d\alpha d\beta H_{\chi(\tau)}^2(\alpha + \tau\beta) = \sum_{j,l} e^{-\frac{\pi}{\Im\tau}[(l-j\Re\tau)^2 + (j\Im\tau)^2]} \quad (\text{A.10})$$

$$= \Theta(\vec{0}|\Omega(\tau)). \quad (\text{A.11})$$

On a utilisé les notations de Mumford [97, p.118] pour la fonction thêta ; la matrice de Siegel vaut ici

$$\Omega(\tau) = \frac{i}{\Im\tau} \begin{pmatrix} |\tau|^2 & \Re\tau \\ \Re\tau & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour les valeurs de τ qui nous intéressent, ces fonctions thêta se ramènent à des formes quadratiques en termes de fonctions thêta unidimensionnelles :

$$\begin{aligned} \Theta(\vec{0}|\Omega(i)) &= \theta_3(0|i)^2 \\ \Theta(\vec{0}|\Omega(e^{i\pi/3})) &= \theta_3(0|i\frac{2}{\sqrt{3}})\theta_3(0|i2\sqrt{3}) + \theta_2(0|i\frac{2}{\sqrt{3}})\theta_2(0|i2\sqrt{3}). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

En se servant des liens (A.7) avec les intégrales elliptiques, on aboutit aux expressions du tableau 4.1 pour les moyennes quadratiques.

Les décompositions de Fourier (A.4,A.9) permettent aussi de calculer l'entropie des fonctions sur réseau. On a en effet, toujours par la formule de Parseval,

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^2} d\alpha d\beta H_{\chi(\tau)}(\alpha + \tau\beta) \log H_{\chi(\tau)}(\alpha + \tau\beta) &= \frac{1}{2} \log(2\Im\tau) + 2\Re \log \eta(\tau) \quad (\text{A.13}) \\ &- \frac{\Im\tau}{\pi} \sum_{(m,l) \neq (0,0)} (-1)^{ml+l+m} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}\omega(m,l)}}{\omega(m,l)}, \end{aligned}$$

où on a utilisé la forme quadratique définie positive $\omega(m,l) = |m\tau - l|^2/\Im\tau$ associée à la matrice $\Omega(\tau)/i$. Le dernier terme peut s'écrire comme une intégrale sur les fonctions $\Theta(\vec{0}|s\Omega(\tau))$: il vaut

$$\int_{1/2}^{\infty} ds [\Theta(\vec{0}|s\Omega(\tau)) - 1] = \frac{1}{2} \int_2^{\infty} ds [\Theta(\vec{0}|s\Omega(\tau)) - 1]. \quad (\text{A.14})$$

Nous ne sommes pas parvenus à simplifier cette expression, même pour les cas $\tau = i$, $\tau = e^{i\pi/3}$.

La valeur de la norme sup n'est pas connue pour tout τ , car en général on ne sait pas exactement où se trouve le maximum de $H_{\chi(\tau)}$ sur T_τ . Cependant, pour les deux réseaux étudiés ici, les symétries nous donnent la réponse : il est clair que le maximum de $H_{\chi(i)}$ se trouve au point $(1/2, 1/2)$, et que celui de $H_{\chi(e^{i\pi/3})}$ au centre du triangle équilatéral $(1/2, \sqrt{3}/6)$. Dans le premier cas, la

valeur $\theta_1(\pi(1/2 + i/2)|i)$ est reliée à $\theta_3(0|i)$, donnée directement par (A.7). Dans le second, il faut procéder à quelques transformations (on note $\rho \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\pi/3} + 1$) :

$$\begin{aligned} \theta_1(z|\tau + 1) &= e^{i\pi/4} \theta_1(z|\tau) \\ \implies \theta_1(\pi(1/2 + \sqrt{3}/6)|e^{i\pi/3}) &= e^{-i\pi/4} \theta_1\left(\frac{\rho}{3}|\rho\right) \\ &= e^{i\pi/4} e^{-i\pi\rho/9} \eta(\rho/3). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

(pour obtenir la dernière formule, on s'est servi de la factorisation de θ_1 [17, vol. II p.357]). La fonction $\eta(\rho/3)$ s'obtient aisément à partir de A.7).

Annexe B

Bornes L^∞ pour les états propres du chat

On considère ici uniquement les transformations du chat S . Pour certaines valeurs de N (appelées *admissibles* dans [2]), on peut se servir des expressions explicites des états propres de U_S pour estimer leurs coefficients de Schrödinger et leur densité de Husimi (cette approche a été utilisée par les auteurs de [48] pour prouver la propriété d'ergodicité quantique totale relative à ces suites de valeurs de N). Pour simplifier la présentation, nous nous restreindrons aux entiers N premiers scindés (cf. section 3.4.2). La construction des états propres procède alors comme indiqué dans la sections 3.4.2 et dans [2, section 8.1] : elle est basée sur les propriétés cycliques de l'application S appliquée aux sous-réseaux Λ_i construits par translation du réseau Λ invariant modulo N . À chaque Λ_i on associe un état quantique ψ_i appartenant à un certain espace $\mathcal{H}_{N,\kappa}$ (pour éviter les complications, on ne considère que le cas périodique $\kappa = 0$). On a alors :

$$\begin{aligned} \text{au niveau classique,} \quad & S\Lambda_i = \Lambda_{\lambda'i} \\ \text{au niveau quantique,} \quad & U_S|\psi_i\rangle_N = e^{2i\pi\sigma} e^{-\frac{2i\pi}{N}\frac{b\lambda'}{2}i^2} |\psi_{\lambda'i}\rangle_N, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

où λ' est une valeur propre de S modulo N , choisie telle que $b\lambda'$ soit un entier pair, et σ est une phase. La valeur propre λ' engendre un sous-groupe cyclique de \mathbb{Z}_N^* d'ordre p , auquel sont associées $m(N) \stackrel{\text{def}}{=} (N-1)/p$ orbites (ou cosets) dans \mathbb{Z}_N^* :

$$\mathcal{O}_\alpha = \{l_\alpha \lambda'^s, s = 0, \dots, p-1\} \quad \text{pour } \alpha = 1, \dots, m(N), \quad (\text{B.2})$$

où $l_\alpha \in \mathbb{Z}_N^*$ est un représentant quelconque de l'orbite \mathcal{O}_α . À chaque orbite \mathcal{O}_α , on peut associer une famille de p états propres orthonormés $|\phi_{\alpha,r}\rangle_N$ de valeur propre $e^{2i\pi(\sigma + \frac{r}{p})}$, définis par

$$|\phi_{\alpha,r}\rangle_N = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{s=0}^{p-1} e^{-2i\pi \frac{rs}{p}} e^{-\frac{2i\pi}{N} \frac{b\lambda'}{2} l_\alpha^2 (1-\lambda'^{2s})(1-\lambda'^2)^{-1}} |\psi_{l_\alpha \lambda'^s}\rangle_N. \quad (\text{B.3})$$

L'ensemble de ces états propres (incluant l'état propre sur réseau $|\phi_{0,0}\rangle_N = |\psi_0\rangle$) forme une base orthonormée de $\mathcal{H}_{N,0}$.

On veut estimer les fluctuations d'un de ces états $|\phi_{\alpha,r}\rangle_N$ (en excluant le cas sur réseau, qui est mieux connu). On commence par l'écrire dans la base de départ $|q_j\rangle_N$. Pour les valeurs de N considérées, le réseau invariant Λ est engendré par un vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ modulo N [2, section 5, lemme 2], ce qui fournit la décomposition $|\psi_i\rangle_N = \frac{1}{\sqrt{iN}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi}{N}(\frac{k}{2}j^2 + ij)} |q_j\rangle_N$. En utilisant la notation $A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b\lambda'}{2} l_\alpha^2 (1 - \lambda'^2)^{-1}$ modulo N , on obtient les coefficients de Schrödinger :

$$\langle q_j | \phi_{\alpha,r} \rangle_N = \frac{e^{\frac{2i\pi}{N}(\frac{k}{2}j^2 - A)}}{\sqrt{i p N}} \sum_{s=0}^{p-1} e^{\frac{2i\pi}{N}(A\lambda'^{2s} + j l_\alpha \lambda'^s)} e^{-2i\pi \frac{rs}{p}}. \quad (\text{B.4})$$

On peut réécrire cette somme en utilisant les caractères multiplicatifs χ de \mathbb{Z}_N^* [115]. Un tel caractère est dit d'ordre m ssi $\chi^m \equiv 1$, le caractère trivial. Pour toute fonction f sur \mathbb{Z}_N^* , on a l'identité :

$$\sum_{s=0}^{p-1} f(\lambda'^s) = \frac{1}{m(N)} \sum_{\chi \text{ d'ordre } m(N)} \sum_{x \in \mathbb{Z}_N^*} \chi(x) f(x). \quad (\text{B.5})$$

D'autre part, λ' est la puissance $m(N)$ -ième d'une racine primitive ρ de \mathbb{Z}_N^* , donc il existe un caractère χ_r tel que $e^{-2i\pi \frac{rs}{p}} = \chi_r(\lambda'^s)$, pour tout $s = 0, \dots, p-1$ (ce caractère est construit à partir du logarithme discret, ou *indice*, lié à ρ : $\text{Ind}(\rho^s) = s$). En combinant le tout, on obtient :

$$\langle q_j | \phi_{\alpha,r} \rangle_N = e^{\frac{2i\pi}{N}(\frac{k}{2}j^2 - A)} \frac{1}{\sqrt{i N p}} \frac{1}{m(N)} \sum_{\chi \text{ d'ordre } m(N)} \sum_{x \in \mathbb{Z}_N^*} (\chi \chi_r)(x) e^{\frac{2i\pi}{N}(A x^2 + j l_\alpha x)}. \quad (\text{B.6})$$

La somme sur les x est une somme de Gauss généralisée. Comme $A \not\equiv 0$ modulo N , pour tout caractère multiplicatif χ on a l'estimation [115] :

$$\left| \sum_{x \in \mathbb{Z}_N^*} \chi(x) e^{\frac{2i\pi}{N}(A x^2 + j l_\alpha x)} \right| \leq 2\sqrt{N}. \quad (\text{B.7})$$

On en déduit alors la borne supérieure suivante sur les états propres $|\phi_{\alpha,r}\rangle_N$:

$$\forall \alpha, r, j, \quad |\langle q_j | \phi_{\alpha,r} \rangle_N| \leq \frac{2}{\sqrt{p}}. \quad (\text{B.8})$$

La période p est une fonction assez erratique de N , sur laquelle on dispose d'informations essentiellement probabilistes (correspondant à des comportements moyens sur un ensemble de nombre premiers N). La distribution des diviseurs $m(N)$ a été étudiée par Keating [75, section 4]. Elle est indépendante de la transformation S , elle est très piquée sur la valeur 1 (cette valeur est prise avec un

probabilité ≈ 0.3739), et décroît en moyenne comme $1/m^2$. Ainsi, la proportion de premiers N tels que $m(N) \geq m$ est d'ordre m^{-1} si m est assez grand. Par conséquent, on peut se restreindre sans trop de pertes à des valeurs de N pour lesquelles $m(N)$ reste inférieure à une constante m (cf. [48]). Cette contrainte constitue en fait une restriction sur la dégénérescence des états propres (celle-ci vaut soit $m(N)$ soit $m(N) + 1$). Sur cet ensemble de N , on obtient l'estimation :

$$|\langle q_j | \phi_{\alpha,r} \rangle_N|^2 \leq \frac{4m}{N}. \quad (\text{B.9})$$

Cette estimation est forte, puisque la normalisation des états propres impose $\sum_{j=0}^{N-1} |\langle q_j | \phi_{\alpha,r} \rangle_N|^2 = 1$.

Ce résultat est le pendant de la conjecture de Sarnak sur les fonctions propres du laplacien sur les surfaces bidimensionnelles de courbure négative [72, éq. 0.8]. En effet, la densité de probabilité de présence d'un état propre ϕ au point $x \in [0, 1]$ est approximativement donnée par $|\phi(x)|^2 \approx N |\langle q_{[Nx]} | \phi \rangle_N|^2$; pour les états propres considérés ci-dessus, cette densité de probabilité est bornée uniformément (par rapport à \hbar) par $4m$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

Si on veut se libérer de la contrainte $m(N) \leq m$, on a une majoration plus faible. Dans le cas où N est un premier scindé, p est la période de toutes les orbites (excepté le point fixe à l'origine) partant de points du sous-réseau carré de \mathbb{T}^2 de maille $1/N$ [103] : S^p est congrue à l'identité modulo N . Inversement, si on se donne une matrice S et une période p , on peut calculer le plus grand N pour lequel $S^p \equiv I$ modulo N [76, appendice B]. On trouve en général $N_{\max} \sim C \lambda_+^p$ lorsque $p \rightarrow \infty$, où λ_+ est la plus grande valeur propre (sur \mathbb{R}) de S [46]. On aura donc, asymptotiquement,

$$p(N) \geq \frac{\log N}{\log \lambda_+}, \quad (\text{B.10})$$

ce qui fournit la borne uniforme pour *tous* les N premiers scindés

$$|\langle q_j | \phi_{\alpha,r} \rangle_N|^2 \leq \frac{4 \log \lambda_+}{\log N}. \quad (\text{B.11})$$

Cette estimation est plus faible que la conjecture de Sarnak, elle correspond à des états propres potentiellement très dégénérés, pour lesquels chaque espace propre est de dimension $O(N/\log N)$, et autorise donc de plus fortes fluctuations.

À partir des coefficients de Schrödinger, on peut estimer grossièrement les fonctions de Husimi des états propres $|\phi_{\alpha,r}\rangle_N$. En effet, en écrivant $\phi(z) = \sum_{j=0}^{N-1} \phi_j \langle z | q_j \rangle_N$, et utilisant simplement la borne (B.9), on aboutit à

$$\begin{aligned} |\phi(z)| e^{-\pi N z \bar{z}} &\leq 2 \sqrt{\frac{m}{N}} \sum_{j=0}^{N-1} |\langle z | q_j \rangle_N| e^{-\pi N z \bar{z}} \\ &\leq 2 \sqrt{\frac{m}{N}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (2N)^{1/4} e^{-\frac{\pi}{N} (j - \sqrt{2N} \Re z)^2} \\ &\leq 2^{3/4} m^{1/2} N^{1/4}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Les deux dernières inégalités sont valables dans la limite $N \rightarrow \infty$, à des corrections exponentiellement petites près. La borne ci-dessus est indépendante de z , et amène à une estimation de la borne sup des densités de Husimi des états propres :

$$\|H_\phi\|_\infty \leq 2^{3/2} m \sqrt{N}. \quad (\text{B.13})$$

Cette borne est compatible avec les observations numériques des états propres de U_{S_1} (v. fig. 4.4), et elle semble être violée pour les états du boulanger. Par ailleurs, en supposant que les pics de hauteur $\sim \sqrt{N}$ sont ponctuels, et de largeur \sqrt{N} , le poids d'un tel pic sur la densité totale est d'ordre $N^{-1/2}$.

Si au contraire on utilise des valeurs de N conduisant à des états très dégénérés (par exemple les valeurs N_{\max} correspondant à une période p donnée), on trouve alors dans certains espaces propres des états ayant des pics beaucoup plus prononcés, dont les hauteurs semblent croître $\propto N$; on se trouve alors à la limite de validité de l'équidistribution en mesure (la propriété d'ergodicité totale n'a été démontrée que dans le cas où $m(N)$ reste borné [48]).

Bibliographie

- [1] S. Nonnenmacher and A. Voros, *Eigenstate structures around a hyperbolic point*, J. Phys. **A 30**, 295–315 (1997)
- [2] S. Nonnenmacher, *Crystal properties of eigenstates of quantum cat maps*, Nonlinearity **10**, 1569–1598 (1997)
- [3] S. Nonnenmacher and A. Voros, *Chaotic eigenfunctions in phase space*, submitted to J. Stat. Phys. (1997), chao-dyn/9711016
- [4] O. Agam and S. Fishman, *Quantum eigenfunctions in terms of periodic orbits of chaotic systems*, J. Phys. **A 26**, 2113–2137 (1993); *ibid*, *Semiclassical criterion for scars in wave functions of chaotic systems*, Phys. Rev. Lett. **73**, 806–809 (1994)
- [5] Y. Aharonov and A. Casher, *Ground state of a spin-1/2 charged particle in a two-dimensional magnetic field*, Phys. Rev. **A 19**, 2461–2462 (1979)
- [6] A.V. Andreev, B.D. Simons, O. Agam and B.L. Altshuler, *Semiclassical field theory approach to quantum chaos*, Nucl. Phys. **B482**, 536–566 (1996)
- [7] V.I. Arnold, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, 1976
- [8] V.I. Arnold and A. Avez, *Ergodic Problems in Classical Mechanics*, Benjamin, New York, 1968
- [9] D.P. Arovas, R.N. Bhatt, F.D.M. Haldane, P.B. Littlewood and R. Rammal, *Localization, wave-function topology, and the integer quantized Hall effect*, Phys. Rev. Lett. **60**, 619–622 (1988)
- [10] F. J. Arranz, F. Borondo and R. M. Benito, *Distribution of zeros of the Husimi function in a realistic Hamiltonian molecular system*, Phys. Rev. **E 54**, 2458–2464 (1996)
- [11] O.M. Auslaender and S. Fishman, *Exact eigenfunctions of a chaotic system*, preprint Technion, chao-dyn/9707021
- [12] N.J. Balazs and B.K. Jennings, *Wigner’s function and other distribution functions in mock phase spaces*, Phys. Rep. **104**, 347–391 (1984)
- [13] N.L. Balazs and A. Voros, *Wigner’s function and tunneling*, Ann. Phys. (NY) **199**, 123–140 (1990)
- [14] R. Balian and C. Bloch, *Solution of the Schrödinger equation in terms of classical paths*, Ann. Phys. (NY) **85**, 514–545 (1974)

- [15] V. Bargmann, *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, I*, Comm. Pure Appl. Math. **XIV**, 187–214 (1961)
- [16] V. Bargmann, *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, II : A family of related function spaces. Application to distribution theory*, Comm. Pure Appl. Math. **XX**, 1–101 (1967)
- [17] A. Erdélyi (ed), *Higher transcendental functions (Bateman Manuscript Project)*, McGraw-Hill (1953)
- [18] J.E. Bayfield and P.M. Koch, *Multiphoton ionization of highly excited hydrogen atoms*, Phys. Rev. Lett. **33**, 258–261 (1974)
- [19] F. Benatti, H. Narnhofer and G.L. Sewell, *A non-commutative version of the Arnold cat map*, Lett. Math. Phys. **21**, 157–172 (1991)
- [20] M.V. Berry, *Semi-classical mechanics in phase space : a study of Wigner's function*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. **287**, 237–271 (1977)
- [21] M.V. Berry, *Semiclassical theory of spectral rigidity*, Proc. R. Soc. Lond. **A 400**, 229–251 (1985)
- [22] M.V. Berry, *Quantum scars of classical closed orbits in phase space*, Proc. R. Soc. Lond. **A 423**, 219–231 (1989)
- [23] M.V. Berry, N.L. Balazs, M. Tabor and A. Voros, *Quantum maps*, Ann. Phys. N.Y. **122**, 26–63 (1979)
- [24] M.V. Berry and J.P. Keating, *A new asymptotic representation for $\zeta(1/2+it)$ and quantum spectral determinants*, Proc. R. Soc. Lond. **A 437**, 151–173 (1992)
- [25] M.V. Berry and K.E. Mount, *Semiclassical approximations in wave mechanics*, Reps. Prog. Phys. **35**, 315–397 (1972)
- [26] A.T. Barucha-Reid and M. Sambandham, *Random polynomials*, Academic Press, N.Y., 1986
- [27] R. Blümel and W.P. Reinhardt, *Chaos in atomic physics*, Cambridge University Press, 1997
- [28] P.A. Boasman and J.P. Keating, *Semiclassical asymptotics of perturbed cat maps*, Proc. R. Soc. Lond. **A 449**, 629–653 (1995)
- [29] E.B. Bogomolny, *Semiclassical quantization of multidimensional systems*, Nonlinearity **5**, 805–866 (1992)
- [30] E.B. Bogomolny, *Smoothed wave functions of chaotic quantum systems*, Physica **D 31**, 169–189 (1988)
- [31] E. Bogomolny, O. Bohigas and P. Leboeuf, *Distribution of roots of random polynomials*, Phys. Rev. Lett. **68**, 2726–2729 (1992); *ibid*, *Quantum chaotic dynamics and random polynomials*, J. Stat. Phys. **85**, 639–679 (1996)

- [32] E.B. Bogomolny and J.P. Keating, *Gutzwiller's trace formula and spectral statistics : beyond the diagonal approximation*, Phys. Rev. Lett. **77**, 1472–1475 (1996)
- [33] E. Bogomolny, F. Leyvraz and C. Schmit, *Distribution of eigenvalues for the modular group*, Commun. Math. Phys. **176**, 577–617 (1996)
- [34] R.P. Boas Jr, *Entire Functions*, Academic Press, New York (1954)
- [35] O. Bohigas, *Random matrix theory and chaotic dynamics*, in [64]
- [36] A. Bouzouina and S. De Bièvre, *Equipartition of the eigenfunctions of quantized ergodic maps on the torus*, Commun. Math. Phys. **178**, 83–105 (1996)
- [37] A.M. Chang, H.U. Baranger, L.N. Pfeiffer and K.W. West, *Weak localization in chaotic versus non-chaotic cavities : a striking difference in the line shape*, Phys. Rev. Lett. **73**, 2111 (1994)
- [38] B. Buck and V.A. Macaulay eds., *Maximum entropy in action*, Oxford University Press, 1991
- [39] B.V. Chirikov, *Time-dependent quantum systems*, in [64]
- [40] M.B. Cibils, Y. Cuche, P. Leboëuf and W.F. Wreszinski, *Zeros of the Husimi functions of the spin-boson model*, Phys. Rev. **A 46**, 4560–4568 (1992)
- [41] H. Cohn, *Advanced number theory*, Dover (1980)
- [42] Y. Colin de Verdière, *Ergodicité et fonctions propres du laplacien*, Commun. Math. Phys. **102**, 497–502 (1985)
- [43] Y. Colin de Verdière and B. Parisse, *Équilibre instable en régime semi-classique I*, Comm. Partial Differential Equations **19**, 1535–1563 (1994) ; *II*, Ann. Inst. Henri Poincaré (Physique Théorique) **61**, 347–367 (1994)
- [44] A. Connes, H. Narnhofer and W. Thirring, *Dynamical entropy of C^* -algebras and von Neumann algebras*, Commun. Math. Phys. **112**, 691–719 (1987)
- [45] I.P. Cornfeld, S.V. Fomin and Ya.G. Sinai, *Ergodic theory*, Springer, 1982
- [46] S. De Bièvre, communication privée.
- [47] S. De Bièvre and M. Degli Esposti, *Egorov Theorems and equidistribution of eigenfunctions for the quantized sawtooth and Baker maps*, to appear in Ann. Inst. Henri Poincaré (1998)
- [48] M. Degli Esposti, S. Graffi and S. Isola, *Classical limit of the quantized hyperbolic toral automorphisms*, Commun. Math. Phys. **167**, 471–507 (1995)
- [49] D. Delande, *Chaos in atomic and molecular physics*, in [64]
- [50] J.M. Drouffe and C. Itzykson, *Random geometry and the statistics of two-dimensional cells*, Nucl. Phys. **B 235**, 45–53 (1984)
- [51] B.A. Dubrovin and S.P. Novikov, *Ground states of a two-dimensional electron in a periodic magnetic field*, Sov. Phys. JETP **52**, 511–516 (1980)

- [52] F.J. Dyson, *Statistical theory of the energy levels of complex systems*, J. Math. Phys. **3**, 140–175 (1962)
- [53] A. Edelman and E. Kostlan, *How many zeros of a random polynomial are real?*, Bull. Amer. Math. Soc. **32**, 1–37 (1995)
- [54] A. Einstein, *Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein*, Verh. Deut. Phys. Ges. **19**, 82–92 (1917)
- [55] R. Alicki and M. Fannes, *Defining quantum dynamical entropy*, Lett. Math. Phys. **32**, 75–82 (1994)
- [56] H.M. Farkas and I. Kra, *Riemann surfaces*, Springer, 1991
- [57] M. Farris, *Egorov's theorem on a manifold with diffractive boundary*, Comm. P.D.E. **6**(6), 651–687 (1981)
- [58] F. Faure, *Approche géométrique de la limite semi-classique par les états cohérents et mécanique quantique sur le tore*, Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 1993 (non publié)
- [59] T.M. Fromhold et al., *Manifestations of classical chaos in the energy level spectrum of a quantum well*, Phys. Rev. Lett. **75**, 1142–1145 (1995); P.B. Wilkinson et al., *Observation of 'scarred' wavefunctions in a quantum well with chaotic electron dynamics*, Nature **380**, 608–610 (1996)
- [60] J. Ginibre, *Statistical ensembles of complex, quaternion and real matrices*, J. Math. Phys. **6**, 440–449 (1965)
- [61] P. Gérard and E. Leichtnam, *Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem*, Duke Math. J. **71**(2), 559–607 (1993)
- [62] M.C. Gutzwiller, *Periodic orbits and quantum quantization conditions*, J. Math. Phys. **12**, 343–358 (1971)
- [63] J. Hadamard, J. de Math. Pures et Appl. **4**, 27–74 (1898); (Oeuvres complètes, CNRS Paris 1968, vol. 2, p.729)
- [64] M.-J. Giannoni, A. Voros and J. Zinn-Justin eds., *Chaos et physique quantique*, (École d'été des Houches, Session LII, 1989), North Holland (1991)
- [65] F.D.M. Haldane and E.H. Rezayi, *Periodic Laughlin–Jastrow wave functions for the fractional quantized Hall effect*, Phys. Rev. **B 31**, 2529–2531 (1985)
- [66] J.H. Hannay, *Chaotic analytic zero points : exact statistics for those of a random spin state*, J. Phys. **A 29**, L101–L105 (1996)
- [67] J.H. Hannay and M.V. Berry, *Quantisation of linear maps on a torus - Fresnel diffraction by a periodic grating*, Physica **D 1**, 267–291 (1980)
- [68] W.K. Hayman and P. B. Kennedy, *Subharmonic Functions*, Academic Press, 1976
- [69] B. Helffer, A. Martinez and D. Robert, *Ergodicité et limite semi-classique*, Commun. Math. Phys. **109**, 313–326 (1987)

- [70] E.J. Heller, *Bound state eigenfunctions of classically chaotic Hamiltonian systems : scars of periodic orbits*, Phys. Rev. Lett. **53**, 1515–1518 (1984); E.J. Heller, *Wavepacket dynamics and quantum chaology*, in [64]
- [71] K. Husimi, *Some formal properties of the density matrix*, Proc. Phys.-Math. Soc. Jpn **22**, 264–314 (1940)
- [72] H. Iwaniec and P. Sarnak, *L^∞ norms of eigenfunctions of arithmetic surfaces*, Ann. Math. **141**, 301–320 (1995)
- [73] M. Kac, *On the average number of real roots of a random algebraic equation*, I : Bull. Amer. Math. Soc. **49**, 314–320 (1943); II : Proc. Lond. Math. Soc. **50**, 390–408 (1948)
- [74] V. Kač and D. H. Peterson, *Infinite dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms*, Adv. in Math. **53**, 125–264 (1984)
- [75] J. Keating, *Asymptotic properties of the periodic orbits of the cat map*, Non-linearity **4**, 277–307 (1991)
- [76] J. Keating, *The cat maps : Quantum mechanics and classical motion*, Non-linearity **4**, 309–341 (1991)
- [77] J.R. Klauder and B. Skagerstam, *Coherent States*, World Scientific, Singapore, 1985
- [78] S. Klimek and A. Lesniewski, *Quantum Riemann surfaces II : the discrete series*, Lett. Math. Phys. **24**, 125–139 (1992)
- [79] S. Klimek and A. Lesniewski, *Quantized chaotic dynamics and non-commutative KS entropy*, Ann. Phys. **248**, 173–198 (1996)
- [80] S.G. Krivoslykov and V.I. Manko, *Coherent states and Bloch functions*, phys. stat. sol. (b) **97**, 77–85 (1980)
- [81] O.E. Lanford III, *Introduction to the mathematical theory of dynamical systems*, in : *Comportement chaotique des systèmes déterministes*, G. Iooss, R.H.G. Helleman, R. Stora eds. (École d’été des Houches, session XXXVI), North-Holland (1981)
- [82] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, 1970
- [83] P. Leboeuf, *Phase space approach to quantum dynamics*, J. Phys. **A 24**, 4575–4586 (1991)
- [84] P. Leboeuf, *Statistical theory of chaotic wavefunctions : a model in terms of random analytic functions*, preprint IPN, 1996
- [85] P. Leboeuf and P. Shukla, *Universal fluctuations of zeros of chaotic wavefunctions*, J. Phys. **A 29**, 4827–4835 (1996)
- [86] P. Leboeuf and A. Voros, *Chaos revealing multiplicative representation of quantum eigenstates*, J. Phys. **A 23**, 1765–1774 (1990) and *Quantum Nodal Points as Fingerprints of Classical Chaos*, in : *Quantum Chaos : Between order and disorder*, G. Casati and B.V. Chirikov eds., Cambridge University Press, 507–533 (1995)

- [87] G. Le Caër and J.S. Ho, *The Voronoi tessellation generated from eigenvalues of complex random matrices*, J. Math. Phys. **A 23**, 3279–3295 (1990)
- [88] P. Lelong and L. Gruman, *Entire functions of several complex variables*, Springer, 1986
- [89] A.J. Lichtenberg and M.A. Lieberman, *Regular and stochastic motion*, Springer-Verlag, 1983
- [90] E. Lieb, *Proof of an entropy conjecture of Wehrl*, Commun. Math. Phys. **62**, 35–41 (1978)
- [91] E. Majorana, *Atomi orientati in campo magnetico variabile*, Nuovo Cimento **9**, 43–50 (1932)
- [92] M.L. Mehta, *Random matrices*, Academic Press, 1991
- [93] G.A. Mezincescu, D. Bessis, J.-D. Fournier, G. Mantica and F.D. Aaron, *Distribution of roots of random real generalized polynomials*, J. Stat. Phys. **86**, 675–705 (1996)
- [94] W.H. Miller, *Semiclassical quantization of nonseparable systems : a new look at periodic orbits*, J. Chem. Phys. **63**, 996–999 (1975)
- [95] B. Mirbach and H.J. Korsch, *Phase space entropy and global phase space structures of (chaotic) quantum systems*, Phys. Rev. Lett. **75**, 362–365 (1995); *ibid*, *A generalized entropy measuring quantum localization*, preprint (1997)
- [96] A.G. Monastra, *Cálculo exacto y semiclásico de autoestados en sistemas caóticos*, Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas, Universidad de Buenos Aires, 1997 (non publié)
- [97] D. Mumford, *Tata lectures on Theta I*, Progress in Mathematics, vol. 28, Birkhäuser, 1983
- [98] P.W. O'Connor, S. Tomsovic and E.J. Heller, *Accuracy of semiclassical dynamics in the presence of chaos*, J. Stat. Phys. **68**, 131–152 (1992)
- [99] F.W.J. Olver, *Asymptotics and special functions*, Academic Press, New York (1974)
- [100] B. Osgood, R. Phillips and P. Sarnak, *Extremals of determinants of Laplacians*, J. Funct. Anal. **80**, 148–211 (1988)
- [101] A.M. Ozorio de Almeida, *Hamiltonian systems : Chaos and quantization*, Cambridge University Press, 1988
- [102] T. Paul, *Functions analytic on the half-plane as quantum mechanical states*, J. Math. Phys. **25**, 3252–3263 (1984)
- [103] I. Percival and F. Vivaldi, *Arithmetical properties of strongly chaotic motions*, Physica **D 25**, 105–130 (1987)
- [104] A. M. Perelomov, *Generalized coherent states and their applications*, Springer (1986)

- [105] H. Petersson, *Zur Analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen III*, Math. Ann. **115**, 518–572 (1938)
- [106] C.E. Porter, *Statistical theories of spectra : Fluctuations*, Academic Press (1965)
- [107] T. Prosen, *General quantum surface-of-section method*, J. Phys. **A 28**, 4133–4155 (1995); *ibid*, *Quantum surface of section method : eigenstates and unitary quantum Poincaré evolution*, Physica **D 91**, 244–277 (1996)
- [108] T. Prosen, *Exact statistics of complex zeros for Gaussian random polynomials with real coefficients*, J. Phys. **A 29**, 4417–4423 (1996)
- [109] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics, I : Functional Analysis*, Academic Press, 1972
- [110] N. Rivier, *Statistical crystallography Structure of random cellular networks*, Phil. Mag. **B 52**, 795–819 (1985)
- [111] W. Rudin, *Real and complex analysis*, Mc Graw-Hill (1970)
- [112] Z. Rudnick and P. Sarnak, *The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds*, Commun. Math. Phys. **161**, 195–213 (1994)
- [113] M. Saraceno, *Classical structures in the quantized baker transformation*, Ann. Phys. **199**, 37–60 (1990)
- [114] M. Saraceno and A. Voros, *Towards a semiclassical theory of quantum baker's map*, Physica **D79**, 206–268 (1994)
- [115] W. Schmidt, *Equations over finite fields. An elementary approach*, Lecture Notes in Maths. **536**, Springer, 1976
- [116] A. Schnirelman, *Ergodic properties of eigenfunctions*, Usp. Math. Nauk. **29**, 181–182 (1974)
- [117] K. Seip, *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann–Fock space*, Bull. Am. Math. Soc. **26** 322–328 (1992)
- [118] W. Slomczyński and K. Zyczkowski, *Mean dynamical entropy of quantum maps on the sphere diverges in the semiclassical limit*, preprint chaosdyn/9707008
- [119] J. Stein and H.-J. Stöckmann, *Experimental determination of billiard wave functions*, Phys. Rev. Lett. **68**, 2867–2870 (1992)
- [120] S. Sridhar and E.J. Heller, *Physical and numerical experiments on the wave mechanics of classically chaotic systems*, Phys. Rev. **A 46**, R1728–1731 (1992)
- [121] A.D. Stone, *Transport theory of mesoscopic systems : application to ballistic transport*, in *Mesoscopic quantum physics*, (Les Houches, session LXI), E. Akkermans, G. Montambaux, J.-L. Pichard and J. Zinn-Justin eds., North-Holland, 1995

- [122] M. Tabor, *A semiclassical quantization of area-preserving maps*, Physica **6 D**, 195–210 (1983)
- [123] K. Takahashi, *Wigner and Husimi function in quantum mechanics*, J. Phys. Soc. Jpn **55**, 762–779 (1986), and *Distribution functions in classical and quantum mechanics*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **98**, 109–156 (1989)
- [124] A. Terras, *Harmonic analysis on symmetric spaces and applications I*, Springer, 1985
- [125] A. Voros, Thèse d’Etat (ch. V), Université Paris-Sud, Orsay, France, 1977 (non publié); A. Voros, *Wentzel–Kramers–Brillouin method in the Bargmann representation*, Phys. Rev. **A 40**, 6814–6825 (1989)
- [126] A. Wehrl, *On the relation between classical and quantum entropy*, Rep. Math. Phys. **16**, 353–358 (1979)
- [127] E.T Whittaker and G.N Watson, *A course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1965)
- [128] H. Wiescher and H.J. Korsch, *Intrinsic ordering of quasienergy states for mixed regular/chaotic quantum systems : zeros of the Husimi distribution*, J. Phys. **A 30**, 1763–1773 (1997); H. J. Korsch, C. Müller and H. Wiescher, *On the zeros of the Husimi distribution*, J. Phys. **A 30**, L677–L684 (1997)
- [129] J. Zak, *Group-theoretical consideration of Landau level broadening in crystals*, Phys. Rev. **136A**, 776 (1964)
- [130] S. Zelditch, *Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces*, Duke Math. J. **55**, 919–941 (1987)
- [131] S. Zelditch, *Lectures on quantum dynamics from the semi-classical viewpoint*, lectures given at the Centre Emile Borel during the Semester “Chaos and Quantization”, Paris (1995)
- [132] W.-M. Zhang, D. H. Feng and R. Gilmore, *Coherent states : Theory and some applications*, Rev. Mod. Phys. **62**, 867–927 (1990)
- [133] S. Zelditch and M. Zworski, *Ergodicity of eigenfunctions for Ergodic Billiards*, Commun. Math. Phys. **175**, 673–682 (1996)
- [134] M.R. Zirnbauer, *Pair correlations of quantum chaotic maps from supersymmetry*, lectures given at the NATO workshop *Supersymmetry and Trace formulae* at the Newton Institute, Cambridge, UK (1998)

Articles

Nous joignons à l'introduction qui précède les trois articles écrits durant la période de la thèse. Deux d'entre eux ont été publiés, le troisième n'a été soumis à publication que récemment. Les références sont les suivantes :

- [1] *Eigenstate structures around a hyperbolic point*, S. Nonnenmacher and A. Voros, J. Phys. **A 30**, 295–315 (1997)
- [2] *Crystal properties of eigenstates for quantum cat maps*, S. Nonnenmacher, Nonlinearity **10**, 1569–1598 (1997)
- [3] *Chaotic eigenfunctions in phase space*, S. Nonnenmacher and A. Voros, soumis à J. Stat. Phys. (Novembre 1997) preprint SPhT97129

Ces articles sont inégalement représentés dans le corps de l'exposition. Le second n'est que brièvement abordé dans la section 3.4, tandis que les deux autres sont reproduits de façon plus extensive. Nous présentons les articles précédés d'un bref résumé.